Programme de colles 14
Représentation et couples de variables aléatoires

Quinzaine du 27 mai au 07 juin

Représentation matricielle des applications linéaires

1. Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base. Notation $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$. Matrice d'une application linéaire dans deux bases $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$. Notation $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(f)$
2. A $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ fixées, isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Conséquences : linéarité, unicité de la matrice associée, de l'application linéaire associée lorsque les bases sont données. Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$.
3. Cas d'un espace vectoriel avec une base canonique. Matrice/application linéaire canoniquement associée.
4. Formule $Y = AX$ i.e. $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(y) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(x)$ traduisant l'évaluation $y = f(x)$.
5. Matrice de la composition. Matrice de f^k.
6. Matrice d'un isomorphisme. Matrice de l'inverse. Une famille est une base si et seulement si sa matrice dans une base est inversible.
7. Matrice de passage. Notation $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$. Inverse, composition.
8. Formule $X = PX'$ i.e. $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(x)$.
9. Formule de changement de bases $D = P^{-1}AQ$ ou $A = PDQ^{-1}$ i.e.
   $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f) = P_{\mathscr{B}'_F,\mathscr{B}_F}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E}$ ou $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = P_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}'_F}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f)\,P_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}_E}$.
10. Noyau, image, rang d'une matrice (définition avec la dimension de l'image).
11. Conservation du rang par des opérations élémentaires.
12. Théorème du rang et caractérisation de l'inversibilité d'une matrice par le noyau ou l'image ou le rang.

Couples de variables aléatoires

1. Couple de variables aléatoires réelles. Les $((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ forment un système complet d'évènements (incompatibles), application au calcul $\mathbb{P}((X,Y) \in A \times B)$.
2. Loi conjointe, marginale, conditionnelle de X sachant $Y = y$ ou Y sachant $X = x$.
3. Indépendance de deux v.a. définition sur les singletons.
   Propriétés $\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Y \in B)$.
4. Définition d'un n-uplet de variables aléatoires. Indépendance.
5. Espérance, variance, covariance. Théorème de transfert pour une v.a. pour un couple de v.a.
6. Propriété de l'espérance : linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.
7. Formule de Koenig-Huygens, $\mathbb{V}(aX + bY) = a^2\mathbb{V}(X) + 2ab\mathrm{Cov}(X,Y) + b^2\mathbb{V}(Y)$.
8. Fonction génératrice. La fonction génératrice caractérise la loi. Lien avec l'espérance et la variance.
9. Deux variables indépendantes sont non corrélées et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$. Dans ce cas, $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$ et $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$.
10. Inégalité de Markov, de Bienaymé-Tchebychev.
11. Espérances, variances et fonctions génératrices des lois usuelles (uniforme, Bernoulli, binomiale). Somme de deux lois binomiales indépendantes. Loi de la somme de n variables aléatoires de Bernoulli.

Questions de cours

1. Démonstration de la formule de la matrice du vecteur image.
2. Démonstration de la formule de la matrice de la composition.
3. La formule sur la fonction génératrice de la somme.

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1, matrice de l'image)

Soient $\mathscr{B}_E$ une base de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $x \in E$. On note

$$X = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(x), \qquad Y = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(f(x)) \qquad \text{et} \qquad A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f).$$

Alors

$$Y = AX \qquad \text{i.e.} \qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(f(x)) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(x).$$

Démonstration. Posons $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$, $\mathscr{B}_F = (e'_1, \ldots, e'_n)$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$, et $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$. Puisque

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(x) = X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix},$$

on a $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$. Donc par linéarité,

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j).$$

Or $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ donc la colonne j de A retourne les coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathscr{B}_F$. Donc

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i.$$

Dès lors,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j\right) e'_i \qquad \text{car la somme est rectangulaire.}$$

Ainsi, on reconnaît la formule du produit :

$$Y = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(f(x)) = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{bmatrix} = AX.$$

$\square$

Proposition (démo 2, matrice de la composition)

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathscr{B}_E$ une base de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F et $\mathscr{B}_G$ une base de G. Considérons $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$ et notons $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)$, $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G}(g)$ et $C = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_G}(g \circ f)$. Alors

$$C = BA \qquad \text{i.e.} \qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G}(g)\, \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f).$$

Démonstration. Posons $p = \dim(E)$, $r = \dim(F)$, $n = \dim(G)$, $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$, $\mathscr{B}_F = (e_1, \ldots, e'_r)$, $\mathscr{B}_G = (e''_1, \ldots, e''_n)$, $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;r]\!] \times [\![1;p]\!]} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)$, $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;r]\!]} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G}(g)$ et enfin $C = (c_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]} = BA$. Fixons $j \in [\![1;p]\!]$. Puisque A représente f dans les bases $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$, la colonne j de A retourne les coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathscr{B}_F$. On a donc

$$\begin{aligned}
g \circ f(e_j) &= g\left(\sum_{i=1}^{r} a_{i,j} e'_i\right) & \\
&= \sum_{i=1}^{r} a_{i,j}\, g(e'_i) & &\textit{par linéarité de } g \\
&= \sum_{i=1}^{r} a_{i,j} \sum_{k=1}^{n} b_{k,i} e''_k & &\textit{par définition de } B \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{r} b_{k,i} a_{i,j}\right) e''_k & &\textit{car la somme est rectangulaire} \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_{k,j} e''_k & &\textit{par définition de } C = BA.
\end{aligned}$$

Donc la colonne j de C, $(c_{1,j}, \ldots, c_{n,j})$, retourne les coordonnées de $g \circ f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_G$. Conclusion,

$$BA = C = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_G}(g \circ f).$$

$\square$

Proposition (démo3, Fonction génératrice de la somme dans le cas indépendant)

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Si X et Y sont indépendants, alors

$$G_{X+Y} = G_X \times G_Y.$$

Démonstration. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0;n]\!]$ et $[\![0;p]\!]$ respectivement. Supposons X et Y indépendantes et notons $Z = X+Y$. Alors, $Z(\Omega) = [\![0;n+p]\!]$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par définition,

$$G_{X+Y}(t) = \sum_{k=0}^{n+p} t^k \mathbb{P}(X+Y=k).$$

La famille $(X=i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
G_{X+Y}(t) &= \sum_{k=0}^{n+p} t^k \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X+Y=k \mid X=i)\,\mathbb{P}(X=i) \\
&= \sum_{k=0}^{n+p} t^k \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(i+Y=k \mid X=i)\,\mathbb{P}(X=i) \\
&= \sum_{k=0}^{n+p} t^k \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(Y=k-i \mid X=i)\,\mathbb{P}(X=i) \\
&= \sum_{k=0}^{n+p} t^k \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(Y=k-i)\,\mathbb{P}(X=i) && \text{car } X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X=i) \sum_{k=0}^{n+p} t^k \mathbb{P}(Y=k-i) && \text{car la somme est triangulaire} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X=i) \sum_{k=i}^{p+i} t^k \mathbb{P}(Y=k-i) && \text{car } \mathbb{P}(Y=k-i)=0 \begin{cases} \text{si } k-i<0 \text{ i.e. } k<i \\ \text{ou} \\ \text{si } k-i>p \text{ i.e. } k>p+i \end{cases} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X=i) \sum_{j=0}^{p} t^{j+i} \mathbb{P}(Y=j) && \text{en posant, à } i \text{ fixé, } j=k-i \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} t^i \mathbb{P}(X=i)\right)\left(\sum_{j=0}^{p} t^j \mathbb{P}(Y=j)\right) && \text{car les variables sont séparées} \\
&= G_X(t)G_Y(t).
\end{aligned}$$

$\square$