Devoir Maison 1
Logique, raisonnement, fonctions réelles

A faire pour le jeudi 28 septembre

Problème I - Logique et raisonnement

Partie 1 : Quantificateurs et inégalités

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on considère le prédicat $A(a,b)$: « $a^2 \leqslant b^2$. » et on définit les assertions suivantes :

A_1 : « $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ A(a,b)$. »

A_2 : « $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ A(a,b)$. »

A_3 : « $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ A(a,b)$. »

A_4 : « $\exists b \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ A(a,b)$. »

A_5 : « $\exists a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ A(a,b)$. »

1. Nier chaque assertion A_i pour $i \in [\![1;5]\!]$.
2. Donner la valeur de vérité de chaque assertion A_i pour $i \in [\![1;5]\!]$. Justifier vos réponses.
3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer $A(a,b)$ en fonction des assertions $(a \leqslant |b|)$, $(a \geqslant |b|)$, $(a \leqslant -|b|)$, $(a \geqslant -|b|)$ et des connecteurs ET et OU . *Toutes les assertions et/ou tous les connecteurs ne seront pas nécessaires.*
4. Exprimer $A(a,b)$ en fonction des assertions $(b \geqslant a)$, $(b \leqslant a)$, $(b \leqslant -a)$, $(b \geqslant -a)$, $(b \geqslant 0)$, $(b \leqslant 0)$ et des connecteurs ET et OU . *Toutes les assertions et connecteurs devront apparaître ici dans la réponse.*
5. Tracer les droites $y = x$ et $y = -x$ puis sur le même graphe hachurer les zones du plan où $A(a,b)$ est vraie.

Partie 2 : Une implication fonctionnelle

On note $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$ et pour $f \in E$ on considère les prédicats suivants :

$B(f)$: « $\forall n \in \mathbb{N},\ A(n, f(n))$. »

$C(f)$: « la fonction f est strictement croissante. »

On considère enfin l'implication $P(f)$: « $B(f) \Rightarrow C(f)$ ». Soit $f \in E$.

6. Préciser avec un quantificateur et des variables l'assertion $C(f)$.
7. Nier mathématiquement l'assertion $C(f)$.
8. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de $P(f)$ avec quantificateur et variables.
9. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que la réciproque de $P(f)$ est fausse en général.

Partie 3 : Un contre-exemple

On pose f la fonction définie sur $[0;1]$ par $\forall x \in [0;1],\ f(x) = (2x-1)^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction g_n définie sur $[n;n+1]$ par $\forall x \in [n;n+1],\ g_n(x) = (n+x)\,f(x)$. Enfin, on définit F par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [n;n+1[\,, \qquad F(x) = g_n(x-n)\,.$$

10. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;1]$.
11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que g_n est dérivable sur $[0;1]$ et montrer que

$$\forall x \in [0;1]\,, \qquad g_n'(x) = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{4n-1}{6}\right).$$

12. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ le tableau de variation de g_n sur $[0;1]$. *On traitera le cas $n = 0$ à part.*
13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Préciser par quelle transformation du plan obtient-on le graphe de F sur $[n; n+1[$ à partir de celui de g_n sur $[0;1[$.
14. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser sans calcul le tableau de variation de F sur $[n; n+2]$.
16. Tracer le graphe de F sur $[0;5]$.
17. Montrer que $B(f)$ ET $\overline{C(f)}$ est vraie. Que peut-on en déduire sur $P(f)$?

Problème II - Etude de fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1} \quad \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

Partie 1 : Etude préliminaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = (-x+2)\,\mathrm{e}^x - 2$.

1. Calculer la limite de g en $+\infty$.
2. Etudier les variations de g sur $[0; +\infty[$.
3. Justifier que g ne s'annule pas sur $]0;1] \cup [2; +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]1;2[$, notée α puis préciser le signe de $g(x)$ en fonction de $x \in [0; +\infty[$.

Partie 2 : Etude des variations de f

5. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.
6. Montrer alors que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$. Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
7. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et donner une interprétation graphique de cette limite.
8. (a) Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$.
   (b) En déduire le tableau de variations de f en fonction du réel α et $f(\alpha)$.
   (c) Montrer que $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$.

Partie 3 : Résolution de $f(x) = x$

On considère l'équation d'inconnu $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = x$.

9. Donner une solution évidente à cette équation.
10. Montrer que dans $]0; +\infty[$, l'équation $f(x) = x$ équivaut à $\mathrm{e}^x - x - 1 = 0$.
11. Montrer que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution dans $]0; +\infty[$.