Correction du Devoir Maison 10
Variables aléatoires, Intégration

Du jeudi 16 mai

Problème I - Variables aléatoires

Soit $n \geqslant 4$. On possède trois urnes, l'urne 0 contient n boules blanches, l'urne 1 contient 1 boule noire et $n-1$ boules blanches et l'urne 2 contient 2 boules noires et $n-2$ boules blanches. On choisit une urne et on pioche alors successivement, sans remise, et de façon indépendante n fois dans la **même** urne. On note $(\Omega, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de ce problème.

1. Les tirages indépendants successifs et sans remise des n boules correspondent en fait de ranger toutes les boules et ce de façon uniforme. La boule noire peut alors être placé en première position ou deuxième position ou troisième position ... ou dernière position de façon équiprobable. Conclusion,
$$\boxed{X_0 \sim \mathscr{U}\left(\llbracket 1;n\rrbracket\right)}.$$

Partie 1 : On ne dit pas la boîte rit jaune aux toilettes mais l'urne rit noir

On suppose dans cette partie que l'on pioche dans l'urne 2. Soit X_1 le rang d'apparition de la première boule noire et X_2 le rang d'apparition de la seconde boule noire. On note B_i l'évènement « avoir pioché une boule blanche lors du tirage i. »

2. La première boule noire peut apparaitre au premier tirage, au deuxième tirage également etc. Dans le pire des cas, on ne pioche au début que des boules blanches mais on ne possède que $n-2$ boules blanches et les tirages sont sans remise. Donc dans ce cas, au tirage $n-1$ on tire une boule noire. Ainsi,
$$\boxed{X_1(\Omega) = \llbracket 1;n-1\rrbracket.}$$
La seconde boule noire ne peut pas apparaitre au premier rang, mais peut apparaitre dès le deuxième tirage, troisième, ... voire même le dernier tirage (lorsque $X_1 = n-1$). Ainsi,
$$\boxed{X_2(\Omega) = \llbracket 2;n\rrbracket.}$$

3. (a) Pour obtenir la première boule noire au troisième tirage, il faut avoir obtenue une boule blanche puis une boule blanche puis une boule noire. Donc
$$\boxed{(X_1 = 3) = B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}.}$$
   (b) Par la formule des probabilités composées, on a
$$\mathbb{P}(X_1 = 3) = \mathbb{P}\left(B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{B_3} \mid B_1 \cap B_2\right)\mathbb{P}(B_2 \mid B_1)\,\mathbb{P}(B_1).$$
Or on pioche de façon uniforme dans l'urne et on a $n-2$ boules blanches, donc $\mathbb{P}(B_1) = \frac{n-2}{n}$. Puis si l'on a pioché une boule blanche, il reste $n-3$ boules blanches parmi les $n-1$ boules restantes, donc $\mathbb{P}(B_2 \mid B_1) = \frac{n-3}{n-1}$. Enfin, si l'on a pioché 2 boules blanches, il reste toujours 2 boules noires parmi les $n-2$ boules restantes. Donc $\mathbb{P}\left(\overline{B_3} \mid B_1 \cap B_2\right) = \frac{2}{n-2}$. Ainsi,
$$\mathbb{P}(X_1 = 3) = \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{2}{n-2} = \frac{2(n-3)}{n(n-1)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X_1=3\right)=\frac{2\left(n-3\right)}{n\left(n-1\right)}.}$$

Notamment, contrairement à la question 1, on note que le rang d'apparition de la première boule noire n'est pas uniforme.

4. Soit $k \in X_1\left(\Omega\right)$.

   (a) On suppose toutes les boules discernables. Pour piocher la boule noire au rang k, il faut commencer par piocher successivement et avec remise $k-1$ boules blanches parmi les $n-2$ boules blanches disponibles :
   $$A_{n-2}^{k-1} \text{ façons.}$$
   Puis l'on doit choisir une boule noire au tirage k : 2 choix. Enfin il nous reste $n-k$ boules (dont une noire et $n-k-1$ blanches mais peu importe puisque toutes les boules sont discernables) que l'on doit ranger (cela correspond à une permutations de ces boules) :
   $$A_{n-k}^{n-k} \text{ choix.}$$
   Au total on a
   $$\boxed{2A_{n-2}^{k-1}A_{n-k}^{n-k} \text{ façons d'obtenir une boule noire au tirage } k.}$$

   (b) Ranger toutes les boules consiste à effectuer une permutation de n éléments, on a donc $n!$ façons. Le choix parmi tous les rangements étant uniforme, on en déduit que
   $$\mathbb{P}\left(X_1=k\right)=\frac{2A_{n-2}^{k-1}A_{n-k}^{n-k}}{n!}=\frac{2\frac{(n-2)!}{(n-2-k+1)!}(n-k)!}{n!}=2\frac{(n-2)!}{n!}\frac{(n-k)!}{(n-k-1)!}=\frac{2\left(n-k\right)}{n(n-1)}.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\mathbb{P}\left(X_1=k\right)=\frac{2\left(n-k\right)}{n(n-1)}.}$$

   (c) On suppose les boules de même couleur indiscernables. Pour ranger $k-1$ boules blanches dans les $k-1$ premières positions, on a une seule façon de procéder. Puis l'on tire une boule noire, encore une fois, une seule façon possible. Enfin, on doit ranger 1 boule noire et $n-k-1$ boules blanches dans les $n-k$ dernières positions. Il suffit de choisir la place de la boule noire : $n-k$ choix et l'on range alors les dernières boules blanches dans les dernières places libres. Au total,
   $$\boxed{n-k \text{ façons d'obtenir la première boule noire au tirage } k.}$$

   (d) Il nous faut calculer le nombre total de façons que l'on a de ranger nos deux boules noires et nos $n-2$ boules blanches. Il suffit de choisir les places des boules noires : $\binom{n}{2}$ choix. Puis l'on place les boules blanches dans les places restantes. Donc
   $$\binom{n}{2} \text{ façons de ranger toutes les boules.}$$
   Ainsi, le choix parmi tous les rangements étant uniforme, on obtient,
   $$\mathbb{P}\left(X_1=k\right)=\frac{n-k}{\binom{n}{2}}=\frac{2!(n-2)!(n-k)}{n!}=\frac{2\left(n-k\right)}{n\left(n-1\right)}.$$
   On retrouve bien le résultat de la question 4.b :
   $$\boxed{\mathbb{P}\left(X_1=k\right)=\frac{2\left(n-k\right)}{n\left(n-1\right)}.}$$

5. (a) X_2 est le rang d'apparition de la dernière boule noire donc si l'on regarde les tirages de n à 1 il correspond à la première fois que l'on note une boule noire en comptant les rangs de façon descendante. Donc obtenir la seconde boule au dernier tirage a même probabilité que d'avoir la première boule au premier tirage. Obtenir la seconde boule à l'avant-dernier tirage a même probabilité que d'avoir la première boule au deuxième tirage etc. Conclusion,

$$\boxed{X_2 \text{ et } n+1-X_1 \text{ ont la même loi.}}$$

(b) Soit $k \in [\![2;n]\!] = X_2(\Omega)$. Alors, par la question précédente,

$$\mathbb{P}(X_2 = k) = \mathbb{P}(n+1-X_1 = k) = \mathbb{P}(X_1 = n+1-k).$$

Donc, par la question 4.b,

$$\mathbb{P}(X_2 = k) = \frac{2(n-(n+1-k))}{n(n-1)} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{X_2(\Omega) = [\![2;n]\!], \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![2;n]\!], \quad \mathbb{P}(X_2 = k) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}.}$$

(c) On note que $\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2)) \neq 0$ car il est possible de piocher une boule noire au premier tirage et la seconde boule noire au deuxième tirage. Cependant si l'on avait $X_2 = n+1-X_1$, alors lorsque $X_1 = 1$, nécessairement $X_2 = n$ et donc $\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2)) = 0$ (car $n \geqslant 4$). Contradiction. Conclusion,

$$\boxed{X_2 \neq n+1-X_1}$$

i.e. $\exists \omega \in \Omega$ tel que $X_2(\omega) \neq n+1-X_1(\omega)$.

6. (a) L'évènement $(X_1 = 1) \cap (X_2 = 3)$ correspond à avoir eu une boule noire au premier tirage puis une boule blanche au deuxième et une boule noire au troisième tirage. Donc

$$(X_1 = 1) \cap (X_2 = 3) = \overline{B_1} \cap B_2 \cap \overline{B_3}.$$

Donc par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 3)) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right) \mathbb{P}\left(B_2 \mid \overline{B_1}\right) \mathbb{P}\left(\overline{B_3} \mid \overline{B_1} \cap B2\right).$$

La probabilité d'obtenir une boule noire au premier tirage est de $\mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right) = 2/n$ puis il nous reste toujours $n-2$ boules blanches parmi les $n-1$ boules restantes donc $\mathbb{P}\left(B_2 \mid \overline{B_1}\right) = \frac{n-2}{n-1}$ et enfin il nous reste une boule noire parmi les $n-2$ boules restantes donc $\mathbb{P}\left(\overline{B_3} \mid \overline{B_1} \cap B2\right) = \frac{1}{n-2}$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 3)) = \frac{2}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n-2} = \frac{2}{n(n-1)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 3)) = \frac{2}{n(n-1)}.}$$

(b) On suppose $n \neq 4$. Par les questions précédentes, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{2(n-1)}{n(n-1)} \frac{2 \times 2}{n(n-1)} = \frac{8}{n^2(n-1)} = \frac{4}{n} \frac{2}{n(n-1)}.$$

Or $\frac{4}{n} \neq 1$ et donc par la question précédente,

$$\mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_2 = 3) \neq \mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 3)).$$

Conclusion,

$$\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

(c) Par définition de la probabilité conditionnelle, car $\mathbb{P}(X_2 = 3) \neq 0$, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_2 = 3) = \frac{\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 3))}{\mathbb{P}(X_2 = 3)}.$$

Par la question 6.a, on sait que $\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 3)) = \frac{2}{n(n-1)}$. De plus par la question 5.b lorsque $k = 3$, on obtient, $\mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{2(3-1)}{n(n-1)} = \frac{4}{n(n-1)}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_2 = 3) = \frac{\frac{2}{n(n-1)}}{\frac{4}{n(n-1)}} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_2 = 3) = \frac{1}{2}.}$$

C'est logique, si l'on sait que la seconde boule noire apparait au 3*ième tirage cela signifie que sur les deux premiers tirages on a pioché la première boule noire et une boule blanche. On se ramène donc au cas de l'urne* 1 *lorsque* $n = 2$ *et donc la loi est une loi uniforme sur les deux premiers tirages.*

Partie 2 : Trouver l'urne, une compétence utile pour voter

On choisit maintenant sans regarder, au hasard et de façon équiprobable l'une des trois urnes. On note U son numéro. On pioche alors successivement, sans remise, de façon indépendante, dans l'urne choisie. On note X le rang d'apparition de la première boule noire et on pose $X = 0$ si l'on a obtenu que des boules blanches dans l'urne.

7. On note que si $U = 1$ ou $U = 2$, l'urne contient au moins une boule noire qu'il est possible d'obtenir dès le premier tirage. Donc $\mathbb{P}(X = 1) \neq 0$ et $\mathbb{P}(U = 2 \mid X = 1)$ est bien définie. Par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(U = 2 \mid X = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1 \mid U = 2)\,\mathbb{P}(U = 2)}{\mathbb{P}(X = 1)}.$$

On note que puisque le choix de l'urne est équiprobable, $U \sim \mathscr{U}(\llbracket 0; 2 \rrbracket)$. Donc $\mathbb{P}(U = 2) = \frac{1}{3}$. De plus, si $U = 2$, alors $X = X_1$. Donc par la question 4.b ou 4.d on a

$$\mathbb{P}(X = 1 \mid U = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}.$$

Enfin, $(U = i)_{i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket}$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 1 \mid U = 0)\,\mathbb{P}(U = 0) &+ \mathbb{P}(X = 1 \mid U = 1)\,\mathbb{P}(U = 1)\\ &+ \mathbb{P}(X = 1 \mid U = 2)\,\mathbb{P}(U = 2).\end{aligned}$$

Si $U = 0$, l'urne ne contenant aucune boule noire, $\mathbb{P}(X = 1 \mid U = 0) = 0$. Si $U = 1$, l'urne contient une boule noire et n boules au total donc $\mathbb{P}(X = 1 \mid U = 1) = \frac{1}{n}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X = 1) = 0 + \frac{1}{n} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{n} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{n}.$$

D'où,

$$\mathbb{P}(U = 2 \mid X = 1) = \frac{\frac{2}{n} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(U = 2 \mid X = 1) = \frac{2}{3}.}$$

8. On note que soit on n'a jamais obtenu de première boule noire et $X = 0$ soit on obtient une première boule noire au rang 1 ou 2, ... ou n (possible dans l'urne 1). Donc $X(\Omega) = [\![0; n]\!]$. Soit $k \in [\![0; n]\!]$. Puisque $(U = i)_{i \in [\![0;2]\!]}$ forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = k \mid U = 0)\,\mathbb{P}(U = 0) + \mathbb{P}(X = k \mid U = 1)\,\mathbb{P}(U = 1) + \mathbb{P}(X = k \mid U = 2)\,\mathbb{P}(U = 2).$$

Premier cas, si $k = 0$, alors $\mathbb{P}(X = k \mid U = 1) = \mathbb{P}(X = k \mid U = 2) = 0$. Donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = k \mid U = 0)\,\mathbb{P}(U = 0) = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

car $U \sim \mathscr{U}([\![0; 2]\!])$.

Deuxième cas, si $k \in [\![1; n-1]\!]$, alors, $\mathbb{P}(X = k \mid U = 0) = 0$. Si $(U = 1)$ est réalisé, l'urne ne possède qu'une seule boule noire. Alors $X = X_0$. Donc

$$\mathbb{P}(X = k \mid U = 1) = \mathbb{P}(X_0 = k) = \frac{1}{n}.$$

Si $(U = 2)$ est réalisé, alors $X = X_1$. Donc par la question 4.b ou 4.d

$$\mathbb{P}(X = k \mid U = 1) = \mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

Dès lors,

$$\mathbb{P}(X = k) = 0 + \frac{1}{n} \times \frac{1}{3} + \frac{2(n-k)}{n(n-1)} \times \frac{1}{3} = \frac{n - 1 + 2n - 2k}{3n(n-1)} = \frac{3n - 2k - 1}{3n(n-1)}.$$

Troisième cas, si $k = n$, alors $\mathbb{P}(X = k \mid U = 0) = \mathbb{P}(X = k \mid U = 2) = 0$ et $\mathbb{P}(X = k \mid U = 1) = \mathbb{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{n}$. Donc

$$\mathbb{P}(X = k) = 0 + \frac{1}{n} \times \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3n}.$$

On observe alors que la formule du deuxième cas reste vraie. Conclusion,

$$X(\Omega) = [\![0; n]\!], \qquad \forall k \in [\![0; n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } k = 0 \\ \frac{3n-2k-1}{3n(n-1)} & \text{si } k \in [\![1; n]\!]. \end{cases}$$

Vérification :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) &= \frac{1}{3} + \sum_{k=0}^{n} \frac{3n - 2k - 1}{3n(n-1)} \\
&= \frac{1}{3} + n \times \frac{3n-1}{3n(n-1)} - \frac{2}{3n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{1}{3} + \frac{3n-1}{3(n-1)} - \frac{2}{3n(n-1)} \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{3n-1}{3(n-1)} - \frac{n+1}{3(n-1)} \\
&= \frac{n - 1 + 3n - 1 - n - 1}{3(n-1)} \\
&= 1 \ \textit{OK!!}
\end{aligned}$$

On choisit toujours une des trois urnes au hasard et on pioche dedans (successivement, sans remise, de façon indépendante) jusqu'à être certain de savoir quelle est l'urne initialement choisie dans laquelle on pioche. On note Z le nombre tirages qu'il nous a fallu.

9. Si $U = 2$, on pioche dans l'urne 2. Dans ce cas, lorsque l'on aura pioché les deux boules noires, on sera certains d'être dans l'urne 2 mais pas avant car sans boule noire on peut encore être dans l'urne 0 ou 1 et avec une seule boule noire on peut encore être dans l'urne 1. Donc quand $U = 2$ on peut avoir $Z = 2, 3, 4, \dots, n$. Si $U = 1$ ou $U = 0$ alors on ne saura pas avant le dernier tirage si l'urne contient une boule noire ou aucune. Ainsi,

$$\boxed{(Z < n) \quad \Rightarrow \quad (U = 2)\,.}$$

10. Si $U = 2$, alors on saura réellement que l'on est dans l'urne 2 à l'apparition de la seconde boule noire (avant on hésitera toujours avec l'urne 1). Ainsi $\boxed{\text{sachant } U = 2, \text{ on a } Z \text{ a la même loi que } X_2}$.

11. Soit $k \in [\![2; n-1]\!]$. On a vu à la question 9. que $(Z = k) \subseteq (Z < n) \subseteq (U = 2)$. Donc $(Z = k) = (Z = k) \cap (U = 2)$. Or $\mathbb{P}(U = 2) = \frac{1}{3} \neq 0$ car le choix de l'urne est uniforme : $U \sim \mathscr{U}([\![0; 2]\!])$. Donc

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}((Z = k) \cap (U = 2)) = \mathbb{P}(Z = k \mid U = 2)\,\mathbb{P}(U = 2) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(Z = k \mid U = 2)$$

Par la question précédente, on obtient que

$$\mathbb{P}(Z = k) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_2 = k)\,.$$

Donc par la question 5.b,

$$\mathbb{P}(Z = k) = \frac{2(k-1)}{3n(n-1)}.$$

Si $k = n$, deux méthodes. *Méthode 1.* Les évènements $((U = i))_{i \in [\![0;2]\!]}$ forment un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}((Z = n) \cap (U = 0)) + \mathbb{P}((Z = n) \cap (U = 1)) + \mathbb{P}((Z = n) \cap (U = 2))\,.$$

Or si on choisit l'urne 0, il faudra faire n tirages avant d'être sûr qu'elle ne contient aucune boule noire. Si on choisit l'urne 1, il faudra également faire n tirage pour être sûr d'avoir une boule noire et une seule boule noire. Donc $(U = 0) \subseteq (Z = n)$, $(U = 1) \subseteq (Z = n)$. Donc

$$(Z = n) \cap (U = 0) = (U = 0) \qquad \text{et} \qquad (Z = n) \cap (U = 1) = (U = 1)\,.$$

Ainsi, et avec les mêmes arguments que précédemment pour calculer $\mathbb{P}((Z = n) \cap (U = 2))$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = n) &= \mathbb{P}(U = 0) + \mathbb{P}(U = 1) + \mathbb{P}(Z = n \mid U = 2)\,\mathbb{P}(U = 2) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_2 = n) \\
&= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2(n-1)}{n(n-1)} \\
&= \frac{2n+2}{3n} \\
&= \frac{2(n+1)}{3n}.
\end{aligned}$$

Méthode 2. La famille $((Z = k))_{k \in [\![2;n]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Donc

$$1 = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(Z = k) = \sum_{k=2}^{n-1} \mathbb{P}(Z = k) + \mathbb{P}(Z = n)\,.$$

Donc par ce qui précède,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=n) &= 1-\sum_{k=2}^{n-1}\mathbb{P}(Z=k)\\ &= 1-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3}\frac{2(k-1)}{n(n-1)}\\ &= 1-\frac{2}{3n(n-1)}\left(\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)\right)\\ &= 1-\frac{2}{3n(n-1)}\frac{(n-1)(n-2)}{2}\\ &= \frac{3n-(n-2)}{3n}\\ &= \frac{2(n+1)}{3n}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k\in[\![2;n-1]\!],\quad \mathbb{P}(Z=k)=\frac{2(k-1)}{3n(n-1)}\qquad \text{et}\qquad \mathbb{P}(Z=n)=\frac{2(n+1)}{3n}.}$$

Problème II - Intégration

Soient $f\in\mathscr{C}^1([0;\pi])$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$I_n=\int_0^{\pi}f(t)\left|\sin(nt)\right|\mathrm{d}t.$$

On pose également pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$J_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin(u)\,\mathrm{d}u.$$

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $u=nt$ i.e. $t=\frac{u}{n}$. La fonction $u\mapsto\frac{u}{n}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;n\pi]$ et $\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}u}{n}$. Donc

$$I_n=\int_0^{\pi}f(t)\left|\sin(nt)\right|\mathrm{d}t=\int_0^{n\pi}f\left(\frac{u}{n}\right)\left|\sin(u)\right|\frac{\mathrm{d}u}{n}$$

Par la relation de Chasles, on a alors

$$I_n=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}f\left(\frac{u}{n}\right)\left|\sin(u)\right|\frac{\mathrm{d}u}{n}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, I_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}f\left(\frac{u}{n}\right)\left|\sin(u)\right|\mathrm{d}u.}$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $k\in[\![0;n-1]\!]$. On pose pour tout $u\in[k\pi;(k+1)\pi]$, $v=u-k\pi$ i.e. $u=v+k\pi$. La fonction $v\mapsto v+k\pi$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{d}u=\mathrm{d}v$. Dès lors,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}f\left(\frac{u}{n}\right)\left|\sin(u)\right|\mathrm{d}u=\int_0^{\pi}f\left(\frac{v+k\pi}{n}\right)\left|\sin(v+k\pi)\right|\mathrm{d}v.$$

Or pour tout $v \in [0;\pi]$, $|\sin(v+k\pi)| = \left|(-1)^k \sin(v)\right| = |\sin(v)|$. Comme $v \in [0;\pi]$, $\sin(v) \geqslant 0$ et donc $|\sin(v+k\pi)| = |\sin(v)| = \sin(v)$. Ainsi,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f\left(\frac{u}{n}\right)|\sin(u)|\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi} f\left(\frac{v+k\pi}{n}\right)\sin(v)\,\mathrm{d}v.$$

En sommant, on obtient que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right)\sin(u)\,\mathrm{d}u.}$$

3. La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi]$. Donc f' est continue sur $[0;1]$. Or d'après le théorème des bornes atteintes, une fonction continue sur un segment est bornée (et atteint ses bornes). Donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in [0;\pi]$, $|f'(t)| \leqslant M$. Soit $(x,y) \in [0;\pi]^2$, $x \neq y$. Alors f est continue sur $[x;y]$, dérivable sur $]x;y[$ donc par l'inégalité des accroissements finis,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \sup_{t\in]x;y[} |f'(t)|\,|x-y| \leqslant M\,|f'(t)|.$$

Ceci étant encore vraie si $x = y$, on conclut que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est } M\text{-lipschitzienne sur } [0;\pi].}$$

4. Soient $v \in [0;\pi]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0;n-1]\!]$. Alors, $0 \leqslant \frac{v+k\pi}{n} \leqslant \frac{\pi+(n-1)\pi}{n} = \pi$. Donc $\frac{v+k\pi}{n} \in [0;\pi]$ et de même $\frac{k\pi}{n} \in [0;\pi]$. Donc par la question précédente,

$$\left|f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| \leqslant M\left|\frac{v+k\pi}{n} - \frac{k\pi}{n}\right| = M\left|\frac{v}{n}\right|.$$

Or $0 \leqslant v \leqslant \pi$. Conclusion,

$$\boxed{\left|f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M\pi}{n}.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question 2., on a

$$\begin{aligned} I_n - J_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right)\sin(u)\,\mathrm{d}u - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\left[f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right]\sin(u)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Donc par l'inégalité triangulaire pour la somme puis l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens,

$$\begin{aligned} |I_n - J_n| &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_0^{\pi}\left[f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right]\sin(u)\,\mathrm{d}u\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\left|f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|\sin(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{car } \sin \geqslant 0 \text{ sur } [0;\pi]. \end{aligned}$$

Donc par la question précédente et la croissance de l'intégrale,

$$|I_n - J_n| \leqslant \frac{M\pi}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\sin(u)\,\mathrm{d}u.$$

Or
$$\frac{M\pi}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\sin(u)\,\mathrm{d}u = \frac{M\pi}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[-\cos(u)\right]_{u=0}^{u=\pi} = \frac{M\pi}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(1+1) = \frac{M\pi}{n^2}\times 2n = \frac{2M\pi}{n}$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad |I_n - J_n| \leqslant \frac{M\pi}{n}.}$$

6. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
J_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\int_0^{\pi}\sin(u)\,\mathrm{d}u \qquad\qquad \text{car } f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ est indépendant de } u \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left[-\cos(u)\right]_{u=0}^{u=\pi} \\
&= \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi-0}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(0+\frac{k(\pi-0)}{n}\right).
\end{aligned}$$

Par hypothèse, la fonction f est $\mathscr{C}^1([0;\pi])$ donc notamment continue sur $[0;\pi]$. Dès lors, on reconnaît **une somme** de Riemann. Par conséquent, $\boxed{(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}}$ et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

7. Par la question 5., on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant |I_n - J_n| \leqslant \frac{M\pi}{n}.$$

Et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{M\pi}{n} = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty}|I_n - J_n| = 0 \qquad \text{i.e.} \qquad \lim_{n\to+\infty} I_n - J_n = 0.$$

Ainsi, par la question précédente,

$$I_n = I_n - J_n + J_n \underset{n\to+\infty}{0} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Conclusion, la suite $\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}}$ et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.}$$