Barème du Devoir Maison 10
Variables aléatoires, Intégration

A faire pour le jeudi 16 mai

Total : 55 points.

Problème I - Variables aléatoires 38 pt

Soit $n \geqslant 4$. On possède trois urnes, l'urne 0 contient n boules blanches, l'urne 1 contient 1 boule noire et $n-1$ boules blanches et l'urne 2 contient 2 boules noires et $n-2$ boules blanches. On choisit une urne et on pioche alors successivement, sans remise, et de façon indépendante n fois dans la **même** urne. On note $(\Omega, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de ce problème.

1. **2 pt** On suppose dans cette question que l'on pioche dans l'urne 1. Soit X_0 le rang d'apparition de la boule noire. Sans calcul mais en justifiant, déterminer la loi de X_0.

   $1,5$ point pour la justification, $0,5$ point pour le résultat.

Partie 1 : On ne dit pas la boîte rit jaune aux toilettes mais l'urne rit noir 25 pt

On suppose dans cette partie que l'on pioche dans l'urne 2. Soit X_1 le rang d'apparition de la première boule noire et X_2 le rang d'apparition de la seconde boule noire. On note B_i l'évènement « avoir pioché une boule blanche lors du tirage i. »

2. **2 pt** Quel est l'univers image de X_1 ? de X_2 ?

   1 point pour $X_1(\Omega)$ et 1 point pour $X_2(\Omega)$. Pas de point si non justifié.

3. (a) **2 pt** Préciser $(X_1 = 3)$ en fonction des $(B_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$.
   1 point pour la justification, 1 point pour le résultat.

   (b) **2 pt** En déduire $\mathbb{P}(X_1 = 3)$.
   $0,5$ point pour citer « la formule des probabilités composées », $0,5$ point pour une formule correcte, $0,5$ point pour la justification des probabilités et $0,5$ point pour le calcul.

4. Soit $k \in X_1(\Omega)$.

   (a) **2 pt** On suppose toutes les boules discernables. Justifier que le nombre de façons d'obtenir la première boule noire au rang k est donné par

   $$2A_{n-2}^{k-1}A_{n-k}^{n-k}$$

   On posera par convention $A_{n-2}^{-1} = 1$.

   (b) **2 pt** Montrer que $\mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$.
   $0,5$ point pour la justification, $1,5$ point pour le calcul.

   (c) **1 pt** On suppose les boules de même couleur indiscernables. Déterminer le nombre de façons d'obtenir la première boule noire au rang k.

   (d) **2 pt** Retrouver le résultat de la question 4.b.
   1 point pour le nombre de façons et 1 point pour le calcul de la probabilité.

5. (a) **2 pt** Justifier que X_2 et $n+1-X_1$ ont la même loi.

(b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire la loi de X_2.

(c) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Est-il vrai que $X_2 = n + 1 - X_1$?
Pas de point en absence de justification.

6. (a) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Calculer $\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 3))$.
$0,5$ point pour l'écriture en évènements B_i, $0,5$ point pour la formule des probabilités composées (avec le nom de la formule), $0,5$ point pour la justification et $0,5$ point pour le calcul.

(b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ On suppose $n \neq 4$. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
1 point pour le calcul de $\mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_2 = 3)$ et 1 point pour la justification que les probabilités sont différentes.

(c) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_2 = 3)$.

Partie 2 : Trouver l'urne, une compétence utile pour voter $\boxed{\textbf{11 pt}}$

On choisit maintenant sans regarder, au hasard et de façon équiprobable l'une des trois urnes. On note U son numéro. On pioche alors successivement, sans remise, de façon indépendante, dans l'urne choisie. On note X le rang d'apparition de la première boule noire et on pose $X = 0$ si l'on a obtenu que des boules blanches dans l'urne.

7. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Calculer $\mathbb{P}(U = 2 \mid X = 1)$.

   1 point pour le calcul de $\mathbb{P}(X = 1)$ avec la formule des probabilités totales et 1 point pour la formule de Bayes.

8. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Déterminer la loi de X.

   1 point pour la formule des probabilités totales, $0,5$ point pour le cas $k = 0$, $0,5$ point pour celui $k = n$ et 1 point pour le cas $k \in [\![1; n-1]\!]$.

On choisit toujours une des trois urnes au hasard et on pioche dedans (successivement, sans remise, de façon indépendante) jusqu'à être certain de savoir quelle est l'urne initialement choisie dans laquelle on pioche. On note Z le nombre tirages qu'il nous a fallu.

9. $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Pour quelle valeur de U peut-on avoir $Z < n$?

   Pas de point si non justifié.

10. $\boxed{\textbf{1 pt}}$ **Sachant $\mathbf{U = 2}$**, justifier que Z a la même loi qu'une autre variable aléatoire précédemment définie.

    Pas de point si non justifié.

11. $\boxed{\textbf{4 pt}}$ En déduire la loi de Z.

    2 points pour $k \in [\![2; n-1]\!]$ et 2 points pour $k = n$.

Problème II - Intégration $\boxed{\textbf{17 pt}}$

Soient $f \in \mathscr{C}^1([0; \pi])$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\pi} f(t)\,|\sin(nt)|\,\mathrm{d}t.$$

On pose également pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$J_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin(u)\,\mathrm{d}u.$$

1. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f\left(\frac{u}{n}\right) |\sin(u)| \, \mathrm{d}u.$$

   1 point pour le découpage, 1 point un calcul juste de changement de variable et 1 point pour le nom du théorème et l'hypothèse $\mathscr{C}^1$.

2. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} f\left(\frac{v + k\pi}{n}\right) \sin(v) \, \mathrm{d}v.$$

   $0,5$ point un calcul juste de changement de variable, $0,5$ point pour le nom du théorème et l'hypothèse $\mathscr{C}^1$, $0,5$ pour la simplification du sinus et $0,5$ pour la justification de la disparition des valeurs absolue.

3. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Justifier qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$, tel que f est M-lipschitzienne sur $[0;\pi]$.

   1 point pour le théorème des bornes atteintes (avec la justification f' continue sur $[0;1]$ et 1 point pour le théorème (ou au choix l'inégalité) des accroissements finis.

4. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire que pour tout $v \in [0;\pi]$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0; n-1]\!]$,

$$\left| f\left(\frac{v + k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M\pi}{n}.$$

   1 point pour la justification que les abscisses sont entre $[0;\pi]$ et 1 point pour l'application.

5. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|I_n - J_n| \leqslant \frac{2M\pi}{n}.$$

   1 point pour l'inégalité triangulaire, $0,5$ pour justifier que $\sin(u) \geqslant 0$, 1 point pour le calcul de $\int_0^\pi \sin(u) \, \mathrm{d}u$ et $0,5$ point pour le résultat.

6. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Montrer que $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

   $0,5$ point pour la simplification de $J_n = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, 1 point pour reconnaître une somme de Riemann, $0,5$ point pour citer l'hypothèse f continue sur $[0;\pi]$, 1 point pour le résultat.

7. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

   1 point pour obtenir que $I_n - J_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et 1 point pour conclure sur la limite de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.