Devoir Maison 11
Représentation matricielle, Couple de variables aléatoires

A faire pour le jeudi 13 juin

Problème I - Représentation matricielle

Partie 1 : Faire fi de P, c'est finalement y porter de l'intérêt

Soient $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathscr{B}_1 = \left(1, X, X^2, \ldots, X^n\right)$ la base canonique de E_n. On confond dans toute cette partie le polynôme P et la fonction polynomiale $\tilde{P} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & P(x) \end{array}$.

Pour tout $P \in E$, on pose $\varphi_1(P) = \displaystyle\int_X^{X+1} \tilde{P}(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $j \in [\![0;n]\!]$. On pose $P_j = f\left(X^j\right)$. Montrer que $P_j = \dfrac{1}{j+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{j}\binom{j+1}{i}X^i$.
2. Montrer que φ_1 est un endomorphisme de E_n.
3. Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}\left(P_j\right)$.
4. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}\left(\varphi_1\right)$. Que vaut $a_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1;n+1]\!]^2$?
   Attention, le fait que $\mathscr{B}_1$ est numérotée à partir de 0 décale tous les indices...
5. (a) Justifier que A est triangulaire et que pour tout $i \in [\![1;n+1]\!]$, $a_{i,i} = 1$.
   (b) En déduire $\mathrm{rg}\,(A)$.
   (c) En déduire que φ_1 est un automorphisme.
6. On suppose dans cette question que $n = 2$.
   (a) Expliciter A.
   (b) Déterminer φ_1^{-1}.

Partie 2 : Les parents de ch et sh ont adopté sin et ont formé un espace à eux

On pose $E = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ et on définit $\mathscr{B}_2 = (u_1, u_2, u_3) \in E^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad u_1(x) = \mathrm{e}^{x}, \qquad u_2(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad u_3(x) = \sin(2\pi x)\,.$$

On pose $H = \mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}_2\right)$ et φ_2 la fonction définie par

$$\forall u \in H, \quad \varphi_2(u) \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_x^{x+1} u(t)\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

7. Justifier que φ_2 est bien définie sur H.
8. Montrer que φ_2 est linéaire.
9. Montrer que $\mathscr{B}_2$ est une base de H.
10. Calculer $\varphi_2(u_1)$, $\varphi_2(u_2)$ et $\varphi_2(u_3)$.
11. En déduire que φ_2 est un endomorphisme de H.
12. Calculer $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}\left(\varphi_2\right)$.
13. On pose $u = 2\,\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Préciser B^n et en déduire $\varphi_2^n(u)$.

Partie 3 : $A = PDQ^{-1}$ $A = PDQ^{-1}$ $A = PDQ^{-1}$ $A = PDQ^{-1}$ $A = PDQ^{-1}$ $A = PDQ^{-1}$

On définit $\mathscr{B}_3 = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad v_1(x) = \operatorname{ch}(x), \qquad v_2(x) = \operatorname{sh}(x), \qquad v_3(x) = u_3\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

14. Vérifier que $\mathscr{B}_3$ est une famille de H et déterminer $P = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_3)$.
15. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
16. Justifier que $\mathscr{B}_3$ est une base de H.
17. Déterminer $C = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_3}(\varphi_2)$ par deux méthodes.

Problème II - Variables aléatoires

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $U_1, \ldots, U_n$, n urnes distinctes. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on considère que l'urne k possède k boules numérotées de 1 à k. On effectue une série de tirages successifs avec remise suivant le protocole suivant :

- On commence par tirer avec remise une boule dans l'urne U_n.
- A l'étape $k+1$, si l'on a obtenu précédemment (à l'étape k) une boule numéroté i alors on pioche une boule avec remise une boule dans l'urne U_i.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose X_k le numéro obtenu lors du tirage k.

Partie 1 : Ta boule est à la menthe

1. Quelle est la loi de X_1 ? Préciser son espérance, sa variance et sa fonction génératrice.
2. Pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, déterminer $\mathbb{P}(X_2 = i \mid X_1 = j)$.
3. Montrer que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}(X_2 = i) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}$.
4. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $\mathbb{E}(X_2)$.
6. Calculer $\operatorname{Cov}(X_1, X_2)$. Le résultat est-il cohérent si $n = 1$?

On suppose dans toute la suite que $n = 3$.

Partie 2 : On enchaine avec Markov

7. Déterminer la loi conjointe de X_1 et X_2.
8. Préciser la loi marginale de X_2.
9. Déterminer la variance et la fonction génératrice de X_2.
10. Reconnaître la loi conditionnelle de $\tilde{X}_2 = X_2 - 1$ sachant $(X_1 = 2)$.
11. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 2 \mid X_2 = 2)$.

Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on pose $W_k = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(X_k = 1) \\ \mathbb{P}(X_k = 2) \\ \mathbb{P}(X_k = 3) \end{bmatrix}$. On définit également $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

12. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $W_{k+1} = AW_k$.

13. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}\left(X_{k+1}\right) = \frac{\mathbb{E}(X_k)}{2} + \frac{1}{2}$.

14. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}\left(X_k\right)$.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k = X_k - 1$.

15. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, préciser $\mathbb{E}\left(Y_k\right)$ puis montrer que $\mathbb{P}\left(Y_k \geqslant 1\right) \leqslant \frac{2}{2^k}$.

16. En déduire la limite de $\mathbb{P}\left(X_k = 1\right)$ quand $k \to +\infty$. Interpréter.

Partie 3 : Un train de proba peut en cacher un autre en algèbre

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à A, $\mathscr{C} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Pour tout $i \in [\![1;3]\!]$, on pose $\varepsilon_i = (1-X)^{i-1}$.

17. Justifier que $\mathscr{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

18. Pour tout $i \in [\![1;3]\!]$, calculer $f\left(\varepsilon_i\right)$.

19. Déterminer $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{E}}\left(f\right)$.

20. Soit $Q = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(\mathscr{E}\right)$ et $W_1' = \mathrm{mat}_{\mathscr{E}}\left(\frac{X^2+X+1}{3}\right)$.

    Préciser pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ une expression de W_k en fonction de Q, D, W_1' et k.

21. Calculer W_1'.

22. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la loi de X_k.

23. Retrouver alors le résultat de la question 14.

Partie 4 : Temps d'entrée ou de sortie d'une marche aléatoire...

...je peux vous adresser un excellent manuscrit sur ce sujet.

On admet dans la suite que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $W_k = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{2^k} + \frac{1}{3^k} \\ \frac{2}{2^k} - \frac{2}{3^k} \\ \frac{1}{3^k} \end{bmatrix}$.

On note T_s la variable aléatoire retournant le premier instant k où l'on obtient une boule numérotée 1 ou 2 et T_e la variable aléatoire retournant le premier instant k où l'on obtient une boule numérotée 1.

24. Pour tout $k \geqslant 2$, exprimer $(T_s = k)$ en fonction des $(X_i = 3)$ et/ou $(X_i \neq 3)$.

25. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(T_s = k\right)$.

26. Déterminer I l'ensemble des valeurs de $t \in \mathbb{R}$ pour lesquels $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}^*} t^k \mathbb{P}\left(T_s = k\right)$ converge.

27. En déduire $G_{T_s} : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} t^k \mathbb{P}\left(T_s = k\right)$ la fonction génératrice de T_s sur I.

28. Justifier que pour tout $k \geqslant 2$, $(T_e = k) \subseteq (X_{k-1} \neq 1)$.

29. En déduire que pour tout $k \geqslant 2$, $\mathbb{P}\left(T_e = k\right) \leqslant \frac{4}{2^k}$.

30. Préciser la nature de $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} k\mathbb{P}\left(T_e = k\right)$.