Correction du Devoir Maison 11
Représentation matricielle, couples de variables aléatoires

Du jeudi 13 juin

Problème I - Représentation matricielle

Partie 1 :

Soient $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathscr{B}_1 = \left(1, X, X^2, \ldots, X^n\right)$ la base canonique de E_n. On confond dans toute cette partie le polynôme P et la fonction polynomiale $\tilde{P} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & P(x) \end{array}$.

Pour tout $P \in E$, on pose $\varphi_1(P) = \displaystyle\int_X^{X+1} \tilde{P}(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $j \in [\![0; n]\!]$. On pose $P_j = f\left(X^j\right)$. On a les égalités suivantes :
$$\varphi_1\left(P_j\right) = \int_X^{X+1} t^j \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{j+1}}{j+1}\right]_{t=X}^{t=X+1} = \frac{(X+1)^{j+1} - X^{j+1}}{j+1}.$$
Donc par la formule du binôme de Newton,
$$P_j = \frac{1}{j+1}\left(\sum_{i=0}^{j+1}\binom{j+1}{i}X^i - X^{j+1}\right) = \frac{1}{j+1}\sum_{i=0}^{j+1}\binom{j+1}{i}X^i.$$
Conclusion,
$$\boxed{P_j = \frac{1}{j+1}\sum_{i=0}^{j}\binom{j+1}{i}X^i.}$$

2. On veut montrer que φ_1 est un endomorphisme de E_n. Autrement dit, montrons que
   (i) φ_1 est linéaire,
   (ii) φ_1 va de E_n dans E_n.

   Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in E_n^2$. Alors,
$$\begin{aligned}\varphi_1\left(\lambda P + \mu Q\right) &= \int_X^{X+1} \left(\lambda P + \mu Q\right)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_X^{X+1} \lambda P(t) + \mu Q(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_X^{X+1} P(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_X^{X+1} Q(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \lambda\,\varphi_1\left(P\right) + \mu\,\varphi_1\left(Q\right).\end{aligned}$$
   Donc (i) φ_1 est linéaire.
   De plus, φ_1 est bien définie sur E_n car toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[x; x+1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrons que pour tout $P \in E_n$, on a $\varphi_1\left(P\right) \in E_n$. Soit $P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in E_n$. Alors, par linéarité de φ_1,
$$\varphi_1\left(P\right) = \varphi_1\left(\sum_{j=0}^{n} a_j X^j\right) = \sum_{j=0}^{n} a_j\,\varphi_1\left(X^j\right) = \sum_{j=0}^{n} a_j P_j.$$

Or pour tout $j \in [\![0;n]\!]$, par la question précédente $P_j = \frac{1}{j+1}\sum_{i=0}^{j}\binom{j+1}{i}X^i \in \mathbb{R}_j[X] \subseteq E_n$. Donc par stabilité de E_n par combinaison linéaire (en tant qu'espace vectoriel), on a

$$\varphi_1(P) = \sum_{j=0}^{n} a_j P_j \in E_n.$$

Ceci étant vrai pour $P \in E_n$ quelconque, on en déduit que (ii), φ_1 va bien de E_n dans E_n. Conclusion,

$$\boxed{\varphi_1 \text{ est un endomorphisme de } E_n.}$$

3. Par la question 1. $P_j = \dfrac{1}{j+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{j}\binom{j+1}{i}X^i$. Donc directement,

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1}(P_j) = \begin{bmatrix} \frac{1}{j+1} \\ 1 \\ \vdots \\ \frac{\binom{j+1}{i}}{j+1} \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vert \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1}(\varphi_1)$. Soit $(i,j) \in [\![1;n+1]\!]^2$. Le nombre $a_{i,j}$ est la coordonnée de $\varphi_1\left(X^{j-1}\right)$ selon le vecteur X^{i-1}. Donc par la question 1.

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1;n+1]\!]^2, \qquad a_{i,j} = \begin{cases} \frac{\binom{j}{i-1}}{j} & \text{si} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Attention, le fait que $\mathscr{B}_1$ est numérotée à partir de 0 décale tous les indices...

5. (a) D'après la question précédente, pour tout $(i,j) \in [\![1;n+1]\!]^2$, $i > j$, on a $a_{i,j} = 0$. Donc la matrice A est triangulaire supérieure. De plus les éléments diagonaux sont donnés pour tout $i \in [\![1;n+1]\!]$, par $a_{i,i} = \frac{\binom{i}{i-1}}{i} = \frac{i}{i} = 1$. Conclusion,

$$\boxed{A \text{ est triangulaire supérieure et pour tout } i \in [\![1;n+1]\!],\ a_{i,i} = 1.}$$

(b) D'après la question précédente A est triangulaire et a des coefficients diagonaux tous non nuls. A est donc une matrice échelonnée avec un pivot $a_{i,i}$ à chaque ligne. Donc A est inversible et nécessairement,

$$\boxed{\operatorname{rg}(A) = n+1.}$$

(c) D'après la question précédente et le cours, on sait que $A = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1}(\varphi_1)$ est inversible i.e. φ_1 est bijective. Or φ_1 est un endomorphisme (question 2.). Conclusion,

$$\boxed{\varphi_1 \text{ est un automorphisme.}}$$

6. On suppose dans cette question que $n = 2$.

(a) Par la question 4., on a

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(b) Inversons la matrice A :

$$A \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \qquad I_3 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 - \frac{1}{3}L_3 \qquad \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1}\left(\varphi_1^{-1}\right) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pense à vérifier son résultat. Donc pour tout $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in E_2$, on a

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1}\left(\varphi_1^{-1}(P)\right) = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1}\left(\varphi_1^{-1}\right) \times \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1}(P) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} \\ a_1 - a_2 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Ainsi,

$$\varphi_1^{-1}(P) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + (a_1 - a_2)X + a_2X^2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi_1^{-1} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 & \mapsto & a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + (a_1 - a_2)X + a_2X^2. \end{array}}$$

Partie 2 :

On pose $E = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ et on définit $\mathscr{B}_2 = (u_1, u_2, u_3) \in E^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad u_1(x) = \mathrm{e}^x, \qquad u_2(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad u_3(x) = \sin(2\pi x).$$

On pose $H = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_2)$ et φ_2 la fonction définie par

$$\forall u \in H, \quad \varphi_2(u) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_x^{x+1} u(t)\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

7. Soit $u \in H$. Alors u est combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3. Or ces trois fonctions sont continues donc $u \in E$. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction u est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[x; x+1]$. Donc $\displaystyle\int_x^{x+1} u(t)\,\mathrm{d}t$ existe. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\varphi_2(u)$ existe. Ceci étant vrai pour tout $u \in H$, on en conclut que

$$\boxed{\varphi_2 \text{ est bien définie sur } H.}$$

8. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in E^2$. Alors, $\lambda u + \mu v$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in E$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi_2 (\lambda u + \mu v)(x) &= \int_x^{x+1} (\lambda u + \mu v)(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_x^{x+1} \lambda u(t) + \mu v(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_x^{x+1} u(t) \, \mathrm{d}t + \mu \int_x^{x+1} v(t) \, \mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \lambda \varphi_2(u)(x) + \mu \varphi_2(v)(x). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que

$$\varphi_2 (\lambda u + \mu v) = \lambda \varphi_2(u) + \mu \varphi_2(v).$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi_2 \text{ est linéaire.}}$$

9. (i) Par définition, $\mathscr{B}_2$ est une famille génératrice de H.

(ii) Montrons que $\mathscr{B}_2$ est libre. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E.$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) + \lambda_3 u_3(x) = 0_{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \mathrm{e}^x + \lambda_2 \mathrm{e}^{-x} + \lambda_3 \sin(2\pi x) = 0_{\mathbb{R}}.$$

Or

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right), \\ \mathrm{e}^{-x} &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \\ \sin(2\pi x) &\underset{x\to 0}{=} 2\pi x - 8\pi^3 \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} 0 &\underset{x\to +\infty}{=} \lambda_1 \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) + \lambda_2 \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) \\ &\qquad + \lambda_3 \left(2\pi x - 8\pi^3 \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{x\to +\infty}{=} \lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\pi \lambda_3) x + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{x^2}{2} + \left(\lambda_1 - \lambda_2 - 8\pi^2 \lambda_3\right) \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité,

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\pi \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 8\pi^2 \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_1 \\ 2\lambda_1 + 2\pi \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 2\lambda_1 - 8\pi^2 \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Donc $\mathscr{B}_2$ est une famille libre.

On pouvait aussi évaluer en 0 et 1 pour montrer que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ puis en $\frac{\pi}{4}$ pour obtenir $\lambda_3 = 0$ par exemple.

Par (i) et (ii) on conclut que

$$\boxed{\mathscr{B}_2 \text{ est une base de } H,}$$

et notamment $\dim(H) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_2) = 3$.

10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi_2(u_1)(x) &= \int_x^{x+1} u_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e}^x \\
\varphi_2(u_2)(x) &= \int_x^{x+1} u_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=x}^{t=x+1} = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x-1} \\
\varphi_2(u_3)(x) &= \int_x^{x+1} u_3(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} \sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos(2\pi t)}{2\pi}\right]_{t=x}^{t=x+1} \\
&= \frac{\cos(2\pi x) - \cos(2\pi x + 2\pi)}{2\pi} = 0,
\end{aligned}$$

par 2π périodicité du cosinus sur $\mathbb{R}$. Conclusion,

$$\boxed{\varphi_2(u_1) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e}^x \end{array}, \qquad \varphi_2(u_2) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x-1} \end{array}, \qquad \varphi(u_3) = 0_H.}$$

11. De la question précédente, on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_2(u_1)(x) = (\mathrm{e} - 1)\,\mathrm{e}^x$. Donc

$$\varphi_2(u_1) = (\mathrm{e} - 1)\,u_1 \in H.$$

De même, $\varphi_2(u_2) = \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) u_2 \in H$ et bien sûr $\varphi_2(u_3) = 0_H \in H$. Donc pour tout $i \in [\![1;3]\!]$, $\varphi(u_i) \in H$. Donc par linéarité de φ_2,

$$\varphi_2(H) = \varphi_2(\operatorname{Vect}(u_1, u_2, u_3)) \underset{\text{linéarité}}{=} \operatorname{Vect}(\underbrace{\varphi_2(u_1)}_{\in H}, \underbrace{\varphi_2(u_2)}_{\in H}, \underbrace{\varphi_2(u_3)}_{\in H}) \underset{H \text{ espace vectoriel}}{\subseteq} H.$$

Donc on a bien $\varphi_2 : H \to H$. Or φ_2 est linéaire (question 8.). Conclusion,

$$\boxed{\varphi_2 \text{ est un endomorphisme de } H.}$$

12. On a vu que $\varphi_2(u_1) = (\mathrm{e} - 1)\,u_1$, $\varphi_2(u_2) = \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) u_2$ et $\varphi_2(u_3) = 0_E$. D'où,

$$\boxed{B = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi_2) = \begin{pmatrix} \mathrm{e} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \mathrm{e}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

13. On pose $u = 2\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente, la matrice B étant diagonale, on a directement,

$$\boxed{B^n = \begin{pmatrix} (\mathrm{e} - 1)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Posons $U = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_2}(u)$ et $U_n = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi_2^n(u))$. Alors, on a

$$U_n = B^n U.$$

On va donc calculer U pour obtenir U_n et on en déduira $\varphi_2^n(u)$. On observe que

$$u = 2u_1 - u_2.$$

Donc $U = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ainsi,

$$U_n = \begin{pmatrix} (\mathrm{e}-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(\mathrm{e}-1)^n \\ -\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)^n \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi_2^n(u) = 2(\mathrm{e}-1)^n u_1 - \left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)^n u_2.}$$

Partie 3 : Sur les fonctions II

On définit $\mathscr{B}_3 = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad v_1(x) = \mathrm{ch}(x), \qquad v_2(x) = \mathrm{sh}(x), \qquad v_3(x) = u_3\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

14. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{1}{2}u_1(x) + \frac{1}{2}u_2(x) \\ v_2(x) &= \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{1}{2}u_1(x) - \frac{1}{2}u_2(x) \\ v_3(x) &= u_3\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sin\left(2\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) = \sin(2\pi x + \pi) = -\sin(2\pi x) = -u_3(x). \end{aligned}$$

Donc $v_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 \in H$, $v_2 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 \in H$ et $v_3 = -u_3 \in H$. Donc

$$\boxed{\mathscr{B}_3 \text{ est une famille de } H.}$$

De plus de ces égalités, on en déduit que

$$\boxed{P = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

15. On pouvait naturellement classiquement inverser P par des opérations élémentaires. Remarquons ici directement que $u_1 = v_1 + v_2$, $u_2 = v_1 - v_2$ et $u_3 = -v_3$. Le système associé à $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ étant inversible, on en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$ et de plus,

$$\boxed{P^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3}(\mathscr{B}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

On vérifie facilement que la matrice trouvée fonctionne bien.

16. Puisque P est inversible, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_3)$ est une matrice de changement de base et donc

$$\boxed{\mathscr{B}_3 \text{ est bien une base de } H.}$$

17. Soit $C = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3}(\varphi_2)$. On a $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi_2)$ et $P = P_{\mathscr{B}_2 \to \mathscr{B}_3} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_3)$. Donc par la formule de changement de base,

$$\begin{aligned}
C &= P^{-1}BP \\
&= P^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{e}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{e}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} && \text{par les questions 12. et 14.} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}-1 & \mathrm{e}-1 & 0 \\ 1-\mathrm{e}^{-1} & \mathrm{e}^{-1}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{par la question 15.} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1} & \mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}-2 & 0 \\ \mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}-2 & \mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{C = \begin{pmatrix} \mathrm{sh}(1) & \mathrm{ch}(1)-1 & 0 \\ \mathrm{ch}(1)-1 & \mathrm{sh}(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Problème II - Variables aléatoires

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $U_1, \dots, U_n$, n urnes distinctes. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on considère que l'urne k possède k boules numérotées de 1 à k. On effectue une série de tirages successifs avec remise suivant le protocole suivant :

- On commence par tirer avec remise une boule dans l'urne U_n.
- A l'étape $k+1$, si l'on a obtenu précédemment (à l'étape k) une boule numéroté i alors on pioche avec remise une boule dans l'urne U_i.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose X_k le numéro obtenu lors du tirage k.

Partie 1 : Les deux premiers tirages

1. On commence par piocher dans l'urne n i.e. un numéro entre 1 et n et ce de façon équiprobable. Donc

$$\boxed{X_1 \sim \mathscr{U}([\![1;n]\!]).}$$

Par suite, on sait que

$$\boxed{\mathbb{E}(X_1) = \frac{n+1}{2}, \quad \mathbb{V}(X_1) = \frac{(n-1)(n+1)}{12}, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ G_{X_1}(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t^k.}$$

2. Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$. L'évènement $X_1 = j$ est non négligeable donc $\mathbb{P}(X_2 = i \mid X_1 = j)$ existe. On suppose $X_1 = j$ réalisé c'est-à-dire que l'on a pioché la boule j au premier tirage. Alors, on pioche au deuxième tirage dans l'urne j. Or cette urne ne possède que des boules entre 1 et j donc si $i > j$, $\mathbb{P}(X_2 = i \mid X_1 = j) = 0$. Si $i \in [\![1;j]\!]$, le tirage étant équiprobable, $\mathbb{P}(X_2 = i \mid X_1 = j) = \frac{1}{j}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \qquad \mathbb{P}(X_2 = i \mid X_1 = j) = \begin{cases} \frac{1}{j} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{si } i > j. \end{cases}}$$

3. Soit $i \in [\![1;n]\!]$. Puisque $(X_2 = j)_{j\in[\![1;n]\!]}$ forme un système complet d'évènements (incompatibles) non négligeables, on en déduit de la formule des probabilités totales que

$$\mathbb{P}(X_2 = i) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_2 = i \mid X_1 = j)\,\mathbb{P}(X_1 = j).$$

Donc par la question précédente et le fait que $X_1 \sim \mathscr{U}([\![1;n]\!])$, on a

$$\mathbb{P}(X_2 = i) = \sum_{j=1}^{i} 0 \times \frac{1}{n} + \sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad \mathbb{P}(X_2 = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}.}$$

4. En particulier, si $i = n$,

$$\mathbb{P}(X_2 = n) = \frac{1}{n}\sum_{j=n}^{n}\frac{1}{j} = \frac{1}{n^2}.$$

Or par la question 2. $\mathbb{P}(X_2 = n \mid X_1 = 1) = 0$, si $n \geqslant 2$. Donc

$$\mathbb{P}(X_2 = n \mid X_1 = 1) \neq \mathbb{P}(X_2 = n).$$

Dans ce cas les variables ne sont pas indépendantes. Si $n = 1$, alors X_1 et X_2 sont deux tirages déterministes et donc indépendants. Conclusion,

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes sauf si } n = 1.}$$

5. Par définition, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_2) = \sum_{i=1}^{n} i\mathbb{P}(X_2 = i) &= \sum_{i=1}^{n} i\frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j} && \text{par la question 3.}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant i\leq j\leqslant n}\frac{i}{j}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\frac{j(j+1)}{2}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j+1}{2}\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{2}\right)\\
&= \frac{n+3}{4}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(X_2) = \frac{n+3}{4}.}$$

6. On sait que $\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$. Par le théorème de transfert,
$$\mathbb{E}(X_1X_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij\mathbb{P}((X_2 = i) \cap (X_1 = j)).$$
Or pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}(X_1 = j) \neq 0$ donc
$$\mathbb{E}(X_1X_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij\mathbb{P}(X_2 = i \mid X_1 = j)\,\mathbb{P}(X_1 = j).$$
En utilisant que $X_1 \sim \mathscr{U}([\![1;n]\!])$ et la question 2.
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1X_2) &= \sum_{i=1}^{n}\left(0 + \sum_{j=i}^{n} ij\frac{1}{j}\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} i\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i(n-i+1)\\ &= \frac{1}{n}\left((n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\ &= \frac{n+1}{6}(3n+3-2n-1)\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{6}.\end{aligned}$$
D'autre part, on sait déjà par les questions précédentes que $\mathbb{E}(X_1) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbb{E}(X_2) = \frac{n+3}{4}$. Ainsi,
$$\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = \frac{(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n+1}{2}\frac{n+3}{4} = \frac{n+1}{24}(4n+8-3n-9) = \frac{(n+1)(n-1)}{24}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = \frac{(n+1)(n-1)}{24}.}$$
Si $n = 1$, on ne possède qu'une seule urne, l'urne 1 et une seule boule, la boule 1. Donc X_1 et X_2 sont déterministes : $X_1 = X_2 = 1$. Dès lors $\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = 0$. Or si $n = 1$, on a bien, $\frac{(n+1)(n-1)}{24} = 0 = \operatorname{Cov}(X_1, X_2)$. $\boxed{\text{Le résultat est bien cohérent si } n = 1.}$

On suppose dans toute la suite que $n = 3$.

Partie 2 : Convergence de X_k

7. Soit $(i, j) \in [\![1;3]\!]^2$. Par la question 2. on a
$$\mathbb{P}((X_2 = i) \cap (X_1 = j)) = \mathbb{P}(X_2 = i \mid X_1 = j)\,\mathbb{P}(X_1 = j) = \begin{cases}\frac{1}{j}\frac{1}{3} & \text{si } i \leqslant j\\ 0 & \text{si } i > j.\end{cases}$$
On obtient donc le tableau suivant :

$X_2 \backslash X_1$	1	2	3
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$

8. Par la question 3. pour tout $i \in [\![1;3]\!]$,

$$\mathbb{P}(X_2 = i) = \frac{1}{3}\sum_{j=i}^{3}\frac{1}{j}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{j} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{3}\sum_{j=2}^{3}\frac{1}{j} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{18}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{1}{3}\sum_{j=3}^{3}\frac{1}{j} = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

On pense à vérifier que la somme totale fait bien 1.

On obtient

i	1	2	3
$\mathbb{P}(X_2 = i)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$

Le résultat est bien cohérent avec la question précédente, où l'on peut obtenir la loi marginale de X_2 *en sommant les colonnes sur chaque ligne.*

9. Par la formule de Koenig-Huygens, on a

$$\mathbb{V}(X_2) = \mathbb{E}\left(X_2^2\right) - \mathbb{E}(X_2)^2.$$

Par la question précédente et le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}\left(X_2^2\right) = 1^2 \times \frac{11}{18} + 2^2 \times \frac{5}{18} + 3^2 \times \frac{1}{9} = \frac{11+20+18}{18} = \frac{49}{18}.$$

De plus, par la question 5. $\mathbb{E}(X_2) = \frac{n+3}{4} = \frac{3+3}{4} = \frac{3}{2}$. D'où,

$$\mathbb{V}(X_2) = \frac{49}{18} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{18} - \frac{9}{4} = \frac{98-81}{36} = \frac{17}{36}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{V}(X_2) = \frac{17}{36} \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ G_{X_2}(t) = \frac{11}{18}t + \frac{5}{18}t^2 + \frac{1}{9}t^3.}$$

10. Posons $\tilde{X_2} = X_2 - 1$. Puisque $X_2(\Omega) = [\![1;3]\!]$, alors $\tilde{X_2}(\Omega) = [\![0;2]\!]$. Supposons $X_1 = 2$, (possible car l'évènement est non négligeable) alors par la question 2.

$$\forall i \in [\![0;2]\!], \qquad \mathbb{P}\left(\tilde{X_2} = i \mid X_1 = 2\right) = \mathbb{P}(X_2 - 1 = i \mid X_1 = 2) = \mathbb{P}(X_2 = i+1 \mid X_1 = 2).$$

Donc par la question 2.

$$\forall i \in [\![0;2]\!], \qquad \mathbb{P}\left(\tilde{X_2} = i \mid X_1 = 2\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } i+1 > 2 \text{ i.e. } i = 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } i+1 \leqslant 2 \text{ i.e. } i = 0 \text{ ou } i = 1. \end{cases}$$

Donc $\mathbb{P}\left(\tilde{X_2} = 0 \mid X_1 = 2\right) = \mathbb{P}\left(\tilde{X_2} = 1 \mid X_1 = 2\right) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}\left(\tilde{X_2} = 2 \mid X_1 = 2\right) = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La loi conditionnelle de } \tilde{X_2} \text{ sachant } X_1 = 2 \text{ est une loi de Bernoulli } \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

On peut aussi remarquer que la loi de X_2 *sachant* $X_1 = 2$ *est* $\mathscr{U}([\![1;2]\!])$.

11. On remarque que $\mathbb{P}(X_2 = 2) \neq 0$. Donc par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(X_1 = 2 \mid X_2 = 2) = \frac{\mathbb{P}(X_2 = 2 \mid X_1 = 2)\,\mathbb{P}(X_1 = 2)}{\mathbb{P}(X_2 = 2)}$$

Or par les questions précédentes, on a $\mathbb{P}(X_2 = 2 \mid X_1 = 2) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{5}{18}$. Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = 2 \mid X_2 = 2) = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5}.}$$

Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on pose $W_k = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(X_k = 1) \\ \mathbb{P}(X_k = 2) \\ \mathbb{P}(X_k = 3) \end{bmatrix}$. On définit également $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

12. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La famille $(X_k = j)_{j \in [\![1;3]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = \sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = j)\,\mathbb{P}(X_k = j).$$

Si $X_k = 1$, alors à l'étape $k+1$ on pioche dans l'urne 1 qui ne contient que la boule 1. Donc $\mathbb{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 1) = 1$. Si $X_k = 2$, alors on pioche dans l'urne 2 qui possède deux boules dont le 1. Donc $\mathbb{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 2) = 1/2$ et enfin, si $X_k = 3$, on pioche dans l'urne 3 qui possède 3 boules dont la 1. Donc $\mathbb{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 3) = 1/3$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = \mathbb{P}(X_k = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_k = 2) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_k = 3).$$

De même,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = 2) = \sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(X_{k+1} = 2 \mid X_k = j)\,\mathbb{P}(X_k = j) = 0 + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_k = 2) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_k = 3)$$

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = 3) = \sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}(X_{k+1} = 2 \mid X_k = j)\,\mathbb{P}(X_k = j) = 0 + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_k = 3).$$

Ainsi,

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{k+1} = 2) \\ \mathbb{P}(X_{k+1} = 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(X_k = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_k = 2) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_k = 3) \\ \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_k = 2) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_k = 3) \\ \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_k = 3) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{P}(X_k = 1) \\ \mathbb{P}(X_k = 2) \\ \mathbb{P}(X_k = 3) \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad W_{k+1} = AW_k.}$$

13. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par définition,

$$\mathbb{E}(X_{k+1}) = 1 \times \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) + 2 \times \mathbb{P}(X_{k+1} = 2) + 3 \times \mathbb{P}(X_{k+1} = 3).$$

Donc par la question précédente,

$$\mathbb{E}(X_{k+1}) = \mathbb{P}(X_k = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_k = 2) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_k = 3) + \mathbb{P}(X_k = 2) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_k = 3) + \mathbb{P}(X_k = 3).$$

Or le système $(X_k = i)_{i \in [\![1;3]\!]}$ étant complet, on a $\mathbb{P}(X_k = 1) + \mathbb{P}(X_k = 2) + \mathbb{P}(X_k = 3) = 1$. Donc

$$\mathbb{E}(X_{k+1}) = 1 + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_k = 2) + \mathbb{P}(X_k = 3).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}(X_k)}{2}+\frac{1}{2}&=\frac{\mathbb{P}(X_k=1)+2\mathbb{P}(X_k=2)+3\mathbb{P}(X_k=3)}{2}+\frac{1}{2}\\&=\frac{1-\mathbb{P}(X_k=2)-\mathbb{P}(X_k=3)+2\mathbb{P}(X_k=2)+3\mathbb{P}(X_k=3)}{2}+\frac{1}{2}\\&=1+\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_k=2)+\mathbb{P}(X_k=3).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\qquad \mathbb{E}(X_{k+1})=\frac{\mathbb{E}(X_k)}{2}+\frac{1}{2}.}$$

14. Par la question précédente, la suite $(\mathbb{E}(X_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique. Soit $\omega\in\mathbb{R}$. On a
$$\omega=\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\qquad\Leftrightarrow\qquad\omega=1.$$
Posons $\omega=1$ et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $u_k=\mathbb{E}(X_k)-1$. Alors pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,
$$u_{k+1}=\mathbb{E}(X_{k+1})-1=\frac{\mathbb{E}(X_k)}{2}+\frac{1}{2}-1=\frac{\mathbb{E}(X_k)-1}{2}=\frac{u_k}{2}.$$
Donc $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $1/2$. Donc pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $u_k=\frac{u_1}{2^{k-1}}$. Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{E}(X_k)=u_k+1=\frac{u_1}{2^{k-1}}+1=\frac{\mathbb{E}(X_1)-1}{2^{k-1}}+1.$$
Or par la question 1. pour $n=3$, $\mathbb{E}(X_1)=\frac{4}{2}=2$. Conclusion,
$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\qquad \mathbb{E}(X_k)=1+\frac{1}{2^{k-1}}.}$$

On pose pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $Y_k=X_k-1$.

15. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Par linéarité, $\mathbb{E}(Y_k)=\mathbb{E}(X_k-1)=\mathbb{E}(X_k)-1$. Donc par la question précédente,
$$\mathbb{E}(Y_k)=1+\frac{1}{2^{k-1}}-1=\frac{1}{2^{k-1}}.$$
On note que $Y_k(\Omega)=[\![0;2]\!]$. Donc Y_k est une variable aléatoire positive. Donc par l'inégalité de Markov,
$$\mathbb{P}(Y_k\geqslant 1)=\mathbb{P}(|Y_k|\geqslant 1)\leqslant\frac{\mathbb{E}(|Y_k|)}{1}=\mathbb{E}(Y_k)=\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{2}{2^k}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\qquad \mathbb{E}(Y_k)=\frac{1}{2^{k-1}}\qquad\text{et}\qquad\mathbb{P}(Y_k\geqslant 1)\leqslant\frac{2}{2^k}.}$$

16. On a
$$\mathbb{P}(X_k=1)=\mathbb{P}(Y_k=0)=1-\mathbb{P}(Y_k\geqslant 1)\qquad\qquad\text{car } Y_k(\Omega)=[\![0;2]\!].$$
Donc par la question précédente,
$$1\geqslant\mathbb{P}(X_k=1)\geqslant 1-\frac{2}{2^k}.$$
Or $\lim\limits_{k\to+\infty}1=\lim\limits_{k\to+\infty}1-\dfrac{2}{2^k}=1$. Donc par le théorème d'encadrement,
$$\boxed{\lim_{k\to+\infty}\mathbb{P}(X_k=1)=1.}$$

Autrement dit, $\boxed{(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers une variable déterministe égale à } 1}$.

Ainsi, asymptotiquement, on finira par ne piocher que dans l'urne 1 (ce qui est logique la suite des X_k est décroissante et piocher dans l'urne 1 est le seul état absorbant : si $X_k = 1$, alors nécessairement $X_{k+1} = 1$ et donc tous les tirages suivants seront dans l'urne 1).

Cette convergence est même très rapide car $\mathbb{P}(X_k \neq 1) \leqslant \frac{2}{2^k}$, donc la convergence est sous-géométrique (i.e. au moins géométrique/exponentielle).

Partie 3 : Loi de X_k

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à A, $\mathscr{C} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Pour tout $i \in [\![1;3]\!]$, on pose $\varepsilon_i = (1-X)^{i-1}$.

17. Posons $\mathscr{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. On a
$$\mathscr{E} = \left(1, 1-X, (1-X)^2\right).$$
Donc $\mathscr{E}$ est une famille de polynômes échelonnés en leurs degrés donc $\mathscr{E}$ est libre. Or $\operatorname{Card}(\mathscr{E}) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$. Conclusion,
$$\boxed{\mathscr{E} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

18. On a $X = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$. Donc,
$$Y = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f(\varepsilon_1)) = AX = \begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 0 & 1/2 & 1/3\\ 0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = X.$$
Donc $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$. De même,
$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f(\varepsilon_2)) = A\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\varepsilon_2) = \begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 0 & 1/2 & 1/3\\ 0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\-1/2\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\varepsilon_2).$$
Donc $f(\varepsilon_2) = \frac{1}{2}\varepsilon_2$. Enfin, $\varepsilon_3 = (1-X)^2 = 1 - 2X + X^2$. Donc
$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f(\varepsilon_3)) = A\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\varepsilon_3) = \begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 0 & 1/2 & 1/3\\ 0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/3\\-2/3\\1/3\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\varepsilon_3).$$
Donc $f(\varepsilon_3) = \frac{1}{3}\varepsilon_3$. Conclusion,
$$\boxed{f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, \qquad f(\varepsilon_2) = \frac{1}{2}\varepsilon_2, \qquad f(\varepsilon_3) = \frac{1}{3}\varepsilon_3.}$$

19. Par la question précédente, on a directement,
$$\boxed{D = \operatorname{mat}_{\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.}$$

20. Soit $Q = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{E})$ et $W_1' = \operatorname{mat}_{\mathscr{E}}\left(\frac{1+X+X^2}{3}\right)$. Par la question 12. pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $W_{k+1} = AW_k$. Donc par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $W_k = A^{k-1}W_1$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $A^{k-1} = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}\left(f^{k-1}\right)$ donc par la formule de changement de base,
$$A^{k-1} = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}\left(f^{k-1}\right) = Q\operatorname{mat}_{\mathscr{E}}\left(f^{k-1}\right)Q^{-1} = QD^{k-1}Q^{-1}.$$

Ainsi,

$$W_k = A^{k-1}W_1 = QD^{k-1}Q^{-1}W_1.$$

Or $W_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(\frac{1+X+X^2}{3}\right)$. Donc $W_1 = QW_1'$ ou encore $W_1' = Q^{-1}W_1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad W_k = QD^{k-1}W_1'.}$$

21. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$ tel que $W_1' = \begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{bmatrix}$. Autrement dit,

$$\begin{aligned}\frac{1+X+X^2}{3} &= \lambda_1\,\varepsilon_1 + \lambda_2\,\varepsilon_2 + \lambda_3\,\varepsilon_3 = \lambda_1 + \lambda_2\,(1-X) + \lambda_3\,(1-X)^2\\ &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - (\lambda_2 + 2\,\lambda_3)\,X + \lambda_3\,X^2.\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme,

$$\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{1}{3}\\ -\lambda_2 - 2\,\lambda_3 = \frac{1}{3}\\ \lambda_3 = \frac{1}{3}\end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases}\lambda_1 = \frac{1}{3} - \lambda_2 - \lambda_3 = \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 1\\ \lambda_2 = -\frac{1}{3} - 2\,\lambda_3 = -\frac{1}{3} - 2\frac{1}{3} = -1\\ \lambda_3 = \frac{1}{3}\end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{W_1' = \begin{bmatrix}1\\-1\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}.}$$

22. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, Par les deux questions précédentes,

$$W_k = QD^{k-1}W_1' = QD^{k-1}\begin{bmatrix}1\\-1\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

Or $D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ donc $D^{k-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2^{k-1}}&0\\0&0&\frac{1}{3^{k-1}}\end{pmatrix}$. Ainsi,

$$W_k = Q\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2^{k-1}}&0\\0&0&\frac{1}{3^{k-1}}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\\frac{1}{3}\end{bmatrix} = Q\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2^{k-1}}\\\frac{1}{3^k}\end{bmatrix}.$$

De plus, $Q = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(1, 1-X, 1-2X+X^2\right) = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$. Ainsi,

$$W_k = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2^{k-1}}\\\frac{1}{3^k}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 - \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{3^k}\\\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{2}{3^k}\\\frac{1}{3^k}\end{bmatrix}.$$

Conclusion,

i	1	2	3
$\mathbb{P}\left(X_k = i\right)$	$1 - \frac{2}{2^k} + \frac{1}{3^k}$	$2\left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{3^k}\right)$	$\frac{1}{3^k}$

En particulier, si $k = 1$, on retrouve que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 3) = \frac{1}{3}$. Encore plus nice, si $k = 2$, on retrouve la loi de X_2 : $\mathbb{P}(X_2 = 2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$, $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{1}{9}$ et ça c'est classe de quoi être en sbraaaa.

23. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par la question précédente,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_k) &= 1 \times \mathbb{P}(X_k = 1) + 2 \times \mathbb{P}(X_k = 2) + 3 \times \mathbb{P}(X_k = 3) \\ &= 1 - \frac{2}{2^k} + \frac{1}{3^k} + 4\left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{3^k}\right) + \frac{3}{3^k} \\ &= 1 + \frac{2}{2^k}\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve le résultat de la question 14.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{E}(X_k) = 1 + \frac{2}{2^k}.}$$

Partie 4 : Temps de sortie, temps d'entrée

On admet dans la suite que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $W_k = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{2^k} + \frac{1}{3^k} \\ \frac{2}{2^k} - \frac{2}{3^k} \\ \frac{1}{3^k} \end{bmatrix}$.

On note T_s la variable aléatoire retournant le premier instant k où l'on obtient une boule numérotée 1 ou 2 et T_e la variable aléatoire retournant le premier instant k où l'on obtient une boule numérotée 1.

24. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour obtenir $(T_s = k)$ il faut et il suffit d'obtenir le numéro 3 lors des tirages 1 à $k - 1$ puis de piocher ou le numéro 1 ou le numéro 2 i.e. ne pas obtenir le numéro 3 à l'étape k. Ainsi,

$$\boxed{(T_s = k) = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant k-1} (X_i = 3) \cap (X_k \neq 3).}$$

25. Par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_s = k) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant k-1} (X_i = 3) \cap (X_k \neq 3)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X_k \neq 3 \,\middle|\, \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant k-1} (X_i = 3)\right) \prod_{i=1}^{k-2} \mathbb{P}(X_{i+1} = 3 \mid X_i = 3)\, \mathbb{P}(X_1 = 3).\end{aligned}$$

avec la convention où le produit vaut 1 si $k = 2$. Or le tirage initial est équiprobable, $\mathbb{P}(X_1 = 3) = 1/3$. De plus si $X_i = 3$, i.e. on pioche dans l'urne 3 à l'étape $i + 1$, alors on a une chance sur 3 d'obtenir à nouveau la boule 3. Donc $\mathbb{P}(X_{i+1} = 3 \mid X_i = 3) = 1/3$. A l'inverse si $X_{k-1} = 3$, alors on a 2 chance sur 3 d'obtenir une boule différente de 3. Donc

$$\mathbb{P}(T_s = k) = \frac{2}{3}\left(\prod_{i=1}^{k-2} \frac{1}{3}\right)\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\frac{1}{3^{k-1}} = \frac{2}{3^k}.$$

On note que le résultat reste vrai si $k = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(T_s = k) = \frac{2}{3^k}.}$$

26. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} t \in I \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k\in\mathbb{N}^*} t^k \mathbb{P}\left(T_s = k\right) \text{ converge} \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{2t^k}{3^k} \text{ converge} \qquad \text{par la question précédente} \\ &\Leftrightarrow \quad -1 < \frac{t}{3} < 1 \qquad \text{car on reconnait une série géométrique de raison } q = \frac{t}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad -3 < t < 3. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I = \left]-3;3\right[.}$$

27. Soit $t \in I$. Par la question précédente, $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} t^k \mathbb{P}\left(T_s = k\right)$ converge et de plus est une série géométrique donc

$$G_{T_s}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} t^k \mathbb{P}\left(T_s = k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2t^k}{3^k} = 2 \times \frac{t}{3} \times \frac{1}{1-\frac{t}{3}} = \frac{2t}{3-t}.$$

Conclusion,

$$\boxed{G_{T_s} : \begin{array}{rcl} I = \left]-3;3\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{2t}{3-t}. \end{array}}$$

28. Puisque T_e est le **premier** tirage où l'on a obtenu la boule 1, il est nécessaire de ne pas l'avoir piochée aux précédents tirages, en particulier au tirage juste avant. Donc pour $k \geqslant 2$, si $(T_e = k)$ est réalisé alors $(X_{k-1} \neq 1)$ aussi (et ce n'est qu'une implication). Conclusion,

$$\boxed{\forall k \geqslant 2, \qquad (T_e = k) \subseteq (X_{k-1} \neq 1).}$$

29. Soit $k \geqslant 2$. Par la question précédente, on a $\mathbb{P}\left(T_e = k\right) \leqslant \mathbb{P}\left(X_{k-1} \neq 1\right)$. Or

$$\mathbb{P}\left(X_{k-1} \neq 1\right) = \mathbb{P}\left((X_{k-1} = 2) \sqcup (X_{k-1} = 3)\right) = \frac{2}{2^{k-1}} - \frac{2}{3^{k-1}} + \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{2}{2^{k-1}} - \frac{2}{3^{k-1}} \leqslant \frac{2}{2^{k-1}} = \frac{4}{2^k}.$$

On retrouve l'inégalité de Markov obtenu à la question 15.

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \geqslant 2, \qquad \mathbb{P}\left(T_e = k\right) \leqslant \frac{4}{2^k}.}$$

30. Posons pour tout $k \geqslant 1$, $u_k = k\mathbb{P}\left(T_e = k\right)$. Alors par la question précédente, pour tout $k \geqslant 2$,

$$0 \leqslant k^2 u_k = k^3 \mathbb{P}\left(T_e = k\right) \leqslant \frac{4k^3}{2^k}.$$

Or par croissance comparée, $\frac{4k^3}{2^k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc il existe $k_0 \geqslant 2$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$,

$$0 \leqslant \frac{4k^3}{2^k} \leqslant 1.$$

Ainsi, pour tout $k \geqslant k_0$,

$$0 \leqslant k^2 u_k \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{k^2} \qquad \text{car } k > 0.$$

Or $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{k^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que

$$\boxed{\sum_{k\geqslant 2} k\mathbb{P}\left(T_e = k\right) \text{ converge.}}$$

Sa somme totale (à partir de $k = 1$) sera alors $\mathbb{E}\left(T_e\right)$, l'espérance de la variable aléatoire T_e dont l'univers image est $\mathbb{N}^*$.