Correction du Devoir Maison 1
Logique, raisonnement et fonctions réelles

Du jeudi 28 septembre

Problème I - Logique et raisonnement

Partie 1 : Quantificateurs et inégalités

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on considère le prédicat $A(a,b)$: « $a^2 \leqslant b^2$. » et on définit les assertions suivantes :

A_1 : « $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ A(a,b)$. »

A_2 : « $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ A(a,b)$. »

A_3 : « $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ A(a,b)$. »

A_4 : « $\exists b \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ A(a,b)$. »

A_5 : « $\exists a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ A(a,b)$. »

1. On a les négations suivantes :

$\boxed{\overline{A_1} : \quad « \exists a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ a^2 > b^2. »}$

$\boxed{\overline{A_2} : \quad « \exists a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ a^2 > b^2. »}$

$\boxed{\overline{A_3} : \quad « \forall a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ a^2 > b^2. »}$

$\boxed{\overline{A_4} : \quad « \forall b \in \mathbb{R},\ \exists a \in \mathbb{R},\ a^2 > b^2. »}$

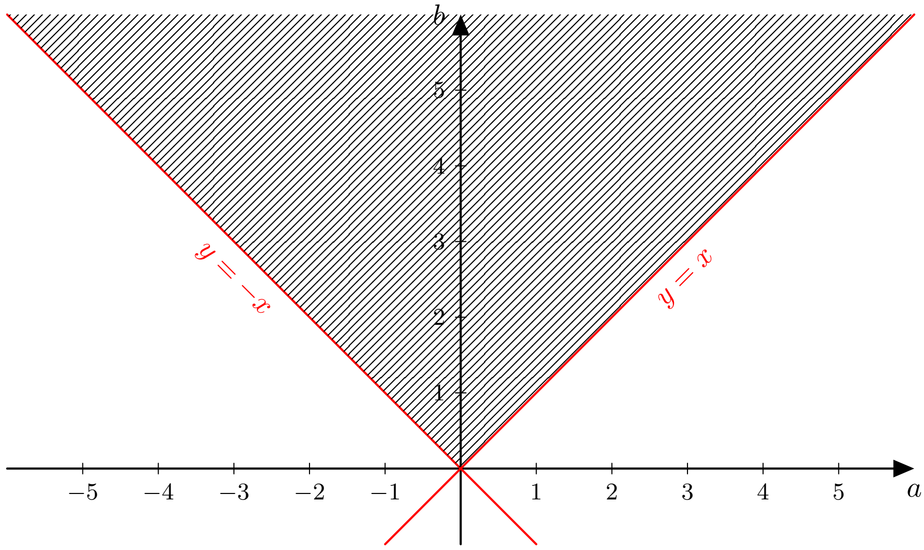
$\boxed{\overline{A_5} : \quad « \forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ a^2 > b^2. »}$

2.
   - L'assertion $\boxed{A_1 \text{ est fausse}}$. En effet $\overline{A_1}$ est vraie : en prenant $a = 2$ et $b = 1$, on a $a^2 = 4 > 1 = b^2$.
   - L'assertion $\boxed{A_2 \text{ est vraie}}$. En effet pour tout $a \in \mathbb{R}$, en prenant $b = |a| + 1$, alors on a $b \geqslant |a| \geqslant 0$. Donc par la stricte croissance de la fonction carrée, on a $b^2 \geqslant |a|^2 = a^2$. Donc
   $$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists b = |a| + 1 \in \mathbb{R} \text{ (par exemple)}, \qquad a^2 \leqslant b^2.$$
   - L'assertion $\boxed{A_3 \text{ est vraie}}$. En effet si $a = 0 \in \mathbb{R}$, alors pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a bien $a^2 = 0 \leqslant b^2$.
   - L'assertion $\boxed{A_4 \text{ est fausse}}$. En effet $\overline{A_4}$ est équivalente à A_2 qui est vraie donc $\overline{A_4}$ est vraie et A_4 est bien fausse.
   - L'assertion $\boxed{A_5 \text{ est vraie}}$. En effet, par exemple pour $a = 0$ et $b = 1$, on a bien $a^2 \leqslant b^2$.

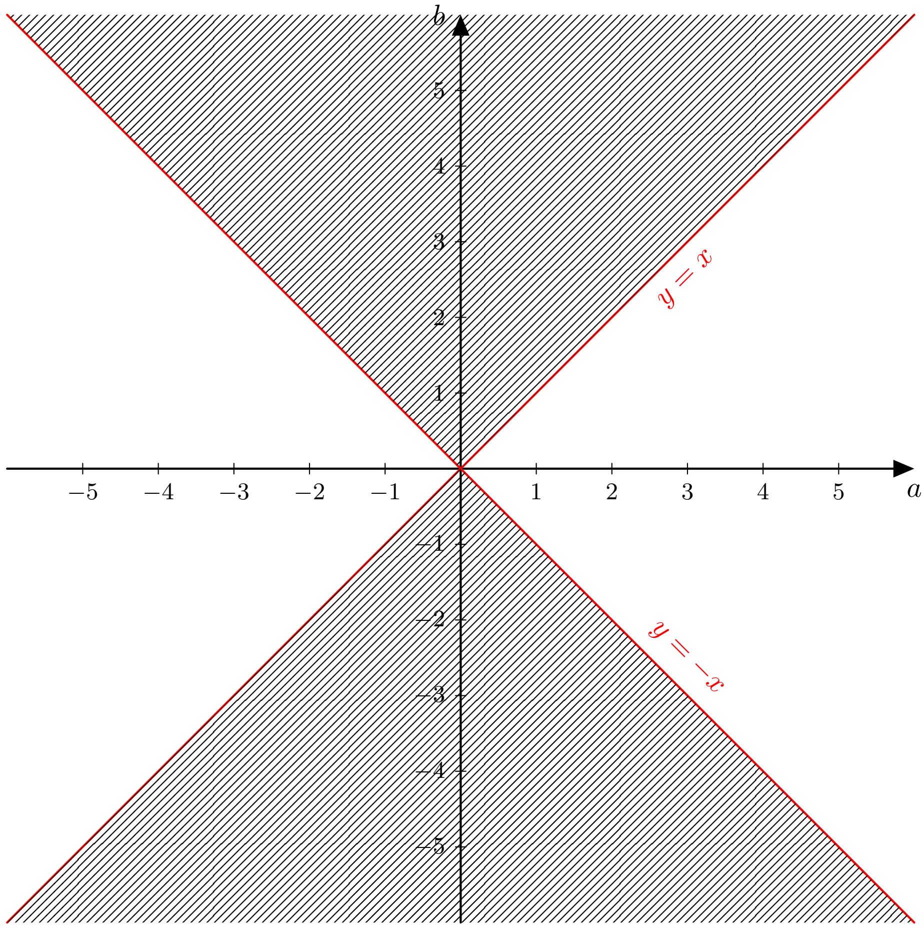
3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} A(a,b) \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 \leqslant b^2 \\ &\Leftrightarrow \quad |a| \leqslant |b| \\ &\Leftrightarrow \quad -|b| \leqslant a \leqslant |b| \\ &\Leftrightarrow \quad (a \geqslant -|b|) \ \text{ET} \ (a \leqslant |b|). \end{aligned}$$
   Conclusion,
$$\boxed{A(a,b) \quad \Leftrightarrow \quad (a \geqslant -|b|) \ \text{ET} \ (a \leqslant |b|).}$$

4. Par disjonction de cas sur le signe de b, on a
$$A(a,b) \Leftrightarrow [(b \geqslant 0) \ \text{ET} \ (a \geqslant -b) \ \text{ET} \ (a \leqslant b)] \ \text{OU} \ [(b \leqslant 0) \ \text{ET} \ (a \leqslant b) \ \text{ET} \ (a \leqslant -b)].$$
   Autrement dit,
$$\boxed{A(a,b) \Leftrightarrow [(b \geqslant 0) \ \text{ET} \ (b \geqslant -a) \ \text{ET} \ (b \geqslant a)] \ \text{OU} \ [(b \leqslant 0) \ \text{ET} \ (b \geqslant a) \ \text{ET} \ (b \leqslant -a)].}$$

5. Si $b \geqslant 0$, on se trouve alors dans le demi-plan supérieur. Dans ce cas, ou l'ordonnée b doit être à la fois plus grande que l'abscisse a et l'opposé $-a$. Donc $(b \geqslant \max(a, -a))$. Ainsi, si $a \geqslant 0$, $b \geqslant a$ et si $a \leqslant 0$, $b \geqslant -a$. D'où le graphique suivant pour $b \geqslant 0$:



En raisonnant de même pour $b \leqslant 0$,



Partie 2 : Une implication fonctionnelle

On note $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$ et pour $f \in E$ on considère les prédicats suivants :

$$\begin{array}{ll} B(f) : & \text{« } \forall n \in \mathbb{N},\ A(n, f(n)). \text{ »} \\ C(f) : & \text{« la fonction } f \text{ est strictement croissante. »} \end{array}$$

On considère enfin l'implication $P(f)$: « $B(f) \Rightarrow C(f)$ ». Soit $f \in E$.

6. On a
$$\boxed{C(f) : \quad \text{« } \forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ (x < y) \Rightarrow (f(x) < f(y)) \text{ ».}}$$

7. La négation de $C(f)$ devient alors :
$$\begin{array}{rl} \overline{C(f)} : & \exists (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ \overline{[(x<y) \Rightarrow (f(x) < f(y))]} \\ \Leftrightarrow & \exists (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ \left[(x<y) \text{ ET } \overline{(f(x) < f(y))}\right] \\ \Leftrightarrow & \exists (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ [(x<y) \text{ ET } (f(x) \geqslant f(y))]. \end{array}$$
Conclusion,
$$\boxed{\overline{C(f)} : \quad \text{« } \exists (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ [(x<y) \text{ ET } (f(x) \geqslant f(y))] \text{ ».}}$$

8. La réciproque de $P(f)$ est
$$\boxed{C(f) \Rightarrow B(f) : \quad \left[\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ (x<y) \Rightarrow (f(x) < f(y))\right] \Rightarrow \left[\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \leqslant f(n)^2.\right]}$$
La contraposée de $P(f)$ est
$$\boxed{\overline{C(f)} \Rightarrow \overline{B(f)} : \quad \left[\exists (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ [(x<y) \text{ ET } (f(x) \geqslant f(y))]\right] \Rightarrow \left[\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 > f(n)^2.\right]}$$
La négation de $P(f)$ est
$$\boxed{B(f) \text{ ET } \overline{C(f)} : \quad \left[\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \leqslant f(n)^2\right] \text{ ET } \left[\exists (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ [(x<y) \text{ ET } (f(x) \geqslant f(y))]\right].}$$
Enoncer la réciproque, la contraposée et la réciproque de $P(f)$ avec quantificateur et variables.

9. Posons $f : x \mapsto \sqrt{x}$. La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, continue sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Donc $f \in E$. De plus, la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc $C(f)$ est vraie. D'autre part,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n)^2 = \sqrt{n}^2 = n \qquad \text{car } n \geqslant 0.$$
Or pour tout $n \geqslant 2$, $n < n^2$. Donc pour tout $n \geqslant 2$, $n^2 > n = f(n)^2$. Donc $B(f)$ est fausse. On a donc $C(f)$ ET $\overline{B(f)}$ est vraie ce qui montre bien que
$$\boxed{\text{la réciproque de } P(f) \text{ est fausse pour } f = \sqrt{\cdot}.}$$

Partie 3 : Un contre-exemple

On pose f la fonction définie sur $[0;1]$ par $\forall x \in [0;1]$, $f(x) = (2x-1)^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction g_n définie sur $[0;1]$ par $\forall x \in [0;1]$, $g_n(x) = (n+x)\, f(x)$. Enfin, on définit F par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [n; n+1[, \qquad F(x) = g_n(x-n).$$

10. La fonction f est bien définie et même dérivable sur $[0;1]$. De plus,
$$\forall x \in [0;1]\,, \qquad f'(x) = 2\,(2x-1)'\,(2x-1) = 4\,(2x-1)\,.$$
Dès lors, pour $x \in [0;1]$, on a
$$f'(x) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x-1 \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \geqslant \frac{1}{2}.$$
De plus, $f(0) = (-1)^2 = 1$, $f\,(1/2) = (1-1)^2 = 0$ et $f\,(1) = (2-1)^2 = 1$. On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x+n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale donc sur $[0;1]$ notamment. La fonction f est dérivable sur $[0;1]$ donc par produit,
$$\boxed{\text{la fonction } g_n \text{ est dérivable sur } [0;1].}$$
De plus, pour tout $x \in [0;1]$,
$$\begin{aligned} g_n'(x) &= (n+x)'\,f(x) + (n+x)\,f'(x) \\ &= (2x-1)^2 + (n+x) \times 4\,(2x-1) && \text{par la question précédente} \\ &= (2x-1)\,(2x-1+4n+4x) \\ &= (2x-1)\,(6x+4n-1) \\ &= 12\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{4n-1}{6}\right). \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0;1]\,, \quad g_n'(x) = 12\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{4n-1}{6}\right).}$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les deux racines de g_n' sont $\frac{1}{2}$ et $-\frac{4n-1}{6}$. Si $n=0$, $-\frac{4n-1}{6} = \frac{1}{6}$ et si $n \geqslant 1$, $-\frac{4n-1}{6} < 0$. On a donc deux cas : si $n=0$, on observe de plus que $g_0(0) = 0 \times f(0) = 0$, $g_0\,(1/6) = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{6}-1\right)^2 = \frac{1}{6} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{27}$, $g_0\,(1/2) = \frac{1}{2}\,(1-1)^2 = 0$ et $g_0(1) = 1 \times (2-1)^2 = 1$.

x	0		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$		1
$x-\frac{1}{2}$			$-$		0	$+$	
$x-\frac{1}{6}$		$-$	0		$+$		
$g_0'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g_0	0	$\nearrow$	$\frac{2}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, $g_n(0) = n\,(-1)^2 = n$, $g_n\,(1/2) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \times 0 = 0$, $g_n(1) = (n+1)\,(2-1)^2 = n+1$. Ainsi,

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$x - \frac{1}{2}$		$-$	0	$+$	
$x + \frac{4n-1}{6}$		$+$		$+$	
$g_n'(x)$		$-$	0	$+$	
g_n	n	$\searrow$	0	$\nearrow$	$n+1$

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\forall x \in [n; n+1[$, $F\,(x) = g_n\,(x-n)$. Donc on obtient le graphe de F sur $[n; n+1[$ à partir de celui de g_n sur $[0; 1[$ par

$$\boxed{\text{une translation horizontale de vecteur } n\,\vec{i}\,.}$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme produit de fonctions qui le sont, F est continue sur $]n; n+1[$. Ainsi globalement la fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que les raccordements sur les bords sont continus. Regardons au point $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, pour tout $x \in [n; n+1[$,

$$F(x) = xf\,(x-n) = x\,(2x - 2n - 1)^2\,.$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \to n \\ x \geqslant n}} F(x) = n.$$

D'autre part, pour tout $x \in [n-1; n[$

$$F(x) = xf\,(x - (n-1)) = x\,(2x - 2n + 2 - 1) = x\,(2x - 2n + 1)$$

D'où

$$\lim_{\substack{x \to n \\ x < n}} F(x) = n.$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \to n \\ x < n}} F(x) = \lim_{\substack{x \to n \\ x \geqslant n}} F(x) = n.$$

Donc F est continue en n. Ceci étant vrai pour $n \geqslant 1$, on en déduit que F est continue sur $\mathbb{N}^*$. Ainsi, F est continue sur $]0; +\infty[$. Or F est également continue sur $[0; 1[$ comme produit de fonctions qui le sont et donc notamment en 0. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

15. Par la question 12., on a

x	0		$\frac{1}{2}$		1
g_n	n	$\searrow$	0	$\nearrow$	$n+1$

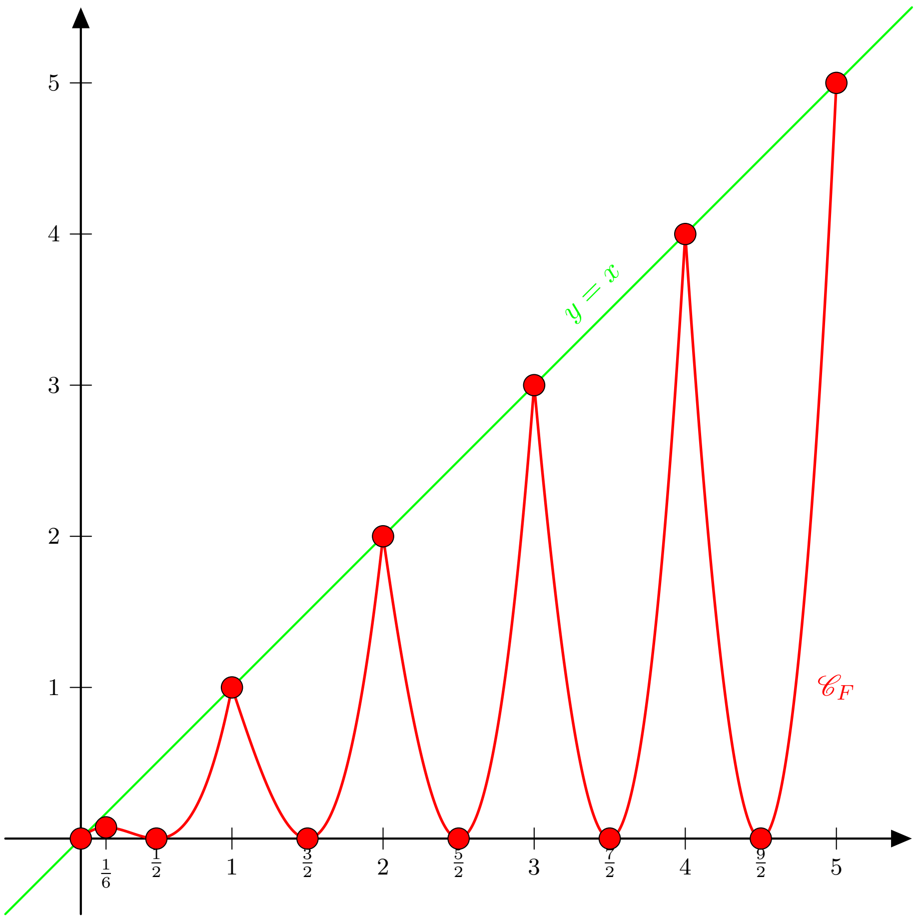
et

x	0		$\frac{1}{2}$		1
g_{n+1}	$n+1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$n+2$

Ainsi, par la question 13.

x	n		$n+\frac{1}{2}$		$n+1$		$n+\frac{3}{2}$		$n+2$
F	n	$\searrow$	0	$\nearrow$	$n+1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$n+2$

16. On a le graphe suivant :



17. On a vu précédemment que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F(n) = n$ donc notamment $F(n)^2 = n^2 \geqslant n^2$. Donc $B(f)$ est vrai. De plus, on a notamment, $F(1) = 1 > F\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ alors que $1 < \frac{3}{2}$. Donc en prenant $x = 1$ et $y = \frac{3}{2}$, on a $\exists (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $(x < y)$ est $(F(x) \geqslant F(y))$. Donc F n'est pas strictement décroissante et donc $\overline{C(f)}$ est vraie. Conclusion,

$$\boxed{B(f) \quad \text{ET} \quad \overline{C(f)} \text{ est vraie.}}$$

On a même mieux : la fonction F n'est croissante sur aucun voisinage de $+\infty$ c'est-à-dire aucun intervalle de la forme $[a; +\infty[$, $a \in \mathbb{R}_+$.

On en déduit que

$$\boxed{\text{l'implication } P(f) \text{ est fausse en général.}}$$

Problème II - Etude de fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

Partie 1 : Etude préliminaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = (-x+2)\,\mathrm{e}^x - 2$.

1. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x+2) = -\infty$. Donc par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x+2)\,\mathrm{e}^x = -\infty$. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty.}$$

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g'(x) = -\mathrm{e}^x + (-x+2)\,\mathrm{e}^x = (-x+1)\,\mathrm{e}^x.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (-x+1)\,\mathrm{e}^x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x+1 > 0 \qquad \text{car } \mathrm{e}^x > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x < 1. \end{aligned}$$

Donc g est strictement croissante sur $[0; 1]$. De même $g(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x > 1$ donc g est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$. De plus, $g(0) = 2\,\mathrm{e}^0 - 2 = 0$ et $g(1) = (-1+2)\,\mathrm{e}^1 - 2 = \mathrm{e} - 2$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$\mathrm{e} - 2$	$\searrow$	$-\infty$

3. Par la question précédente, g est strictement croissante sur $[0;1]$ donc $\forall x \in \,]0;1]$, $g(x) > g(0) = 0$. Par ailleurs, $g(2) = (-2+2)\,\mathrm{e}^2 - 2 = -2$. Or par la question précédente, g est décroissante sur $[1;+\infty[$ donc pour tout $x \geqslant 2$, $g(x) < -2 < 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in [0;1] \cup [2;+\infty[\,, \qquad g(x) \neq 0.}$$

4. Par ce qui précède, on note que la fonction g est
   - continue sur $[1;2]$,
   - strictement décroissante sur $[1;2]$,
   - $g(1) = \mathrm{e} - 2 > 0$ et $g(2) = -2 < 0$.

   Donc par le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), g admet une unique valeur d'annulation sur $[1;2]$. Puisque g n'admet aucune valeur d'annulation en dehors de $[1;2]$, on conclut que

   $$\boxed{\text{l'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur }]1;2[.}$$

   On note α cette unique solution. On obtient alors,

x	0		1		α		2		$+\infty$
$g(x)$	0		$+$		0		$-$		

Partie 2 : Etude des variations de f

5. Soit $x > 0$. On a
   $$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0}.$$
   On reconnait donc le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0. Ainsi,
   $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \exp'(0) = \mathrm{e}^0 = 1.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.}$$

6. Pour montrer que f est dérivable en 0, on revient à la définition. Soit $x > 0$. On a
   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1} - 0}{x} = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}} \qquad \text{car } x > 0.$$
   Or par la question précédente,
   $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$
   Donc le taux d'accroissement de la fonction f en 0 admet une limite finie qui vaut 1. Conclusion,
   $$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 1.}$$
   On sait que l'équation de la tangente en 0 est donnée par
   $$\mathcal{T}: \qquad y = f'(0)\,(x - 0) + f(0).$$
   Or $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$. Ainsi,
   $$\boxed{\mathcal{T}: \qquad y = x.}$$

7. Pour tout $x>0$, on a
$$\frac{x^2}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}.$$
Par croissance comparée, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}=+\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$. Donc par différence,
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}=+\infty.$$
Finalement, par passage à l'inverse,
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=0.$$
Conclusion,
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.}$$
On en déduit que

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ admet une asymptote d'équation } y=0 \text{ au voisinage de } +\infty.}$$

8. (a) Pour tout $x>0$, $\mathrm{e}^x-1>0$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,
$$\forall x>0,\qquad f'(x)=\frac{2x\times(\mathrm{e}^x-1)-x^2\times\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}=\frac{x\,(2\,\mathrm{e}^x-2-x\,\mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x-1)^2}=\frac{x\,((-x+2)\,\mathrm{e}^x-2)}{(\mathrm{e}^x-1)^2}.$$
Ainsi,
$$\boxed{\forall x>0,\qquad f'(x)=\frac{x\,((-x+2)\,\mathrm{e}^x-2)}{(\mathrm{e}^x-1)^2}.}$$
Notamment,
$$\forall x>0,\qquad f'(x)=\frac{x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}g(x).$$
Pour tout $x>0$, $(\mathrm{e}^x-1)^2>0$ et $x>0$ donc $\frac{x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}>0$. Conclusion,
$$\boxed{\forall x>0,\quad f'(x) \text{ est du même signe que } g(x).}$$

(b) On sait que $f(0)=0$.
Par la question 4. on obtient

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

(c) Par définition, $g(\alpha)=0$. Donc par définition de g,
$$\begin{aligned}(-\alpha+2)\,\mathrm{e}^\alpha-2=0 \quad&\Leftrightarrow\quad (-\alpha+2)\,\mathrm{e}^\alpha=2\\ &\Leftrightarrow\quad \mathrm{e}^\alpha=\frac{2}{2-\alpha} \qquad \text{car } \alpha<2 \text{ car } \alpha\in\,]1;2[.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= \frac{\alpha^2}{\mathrm{e}^{\alpha} - 1} \\
&= \frac{\alpha^2}{\frac{2}{2-\alpha} - 1} \\
&= \frac{\alpha^2 (2-\alpha)}{2 - (2-\alpha)} && \text{car } 2 - \alpha \neq 0 \\
&= \frac{\alpha^2 (2-\alpha)}{\alpha} \\
&= \alpha (2-\alpha) && \text{car } \alpha \neq 0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(\alpha) = \alpha (2-\alpha).}$$

Partie 3 : Résolution de $f(x) = x$

On considère l'équation d'inconnu $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = x$.

9. Par définition, $f(0) = 0$. Donc

$$\boxed{x = 0 \text{ est une solution de l'équation } f(x) = x.}$$

10. Soit $x \in \left]0; +\infty\right[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1} = x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = 1 && \text{car } x \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \mathrm{e}^x - 1 && \text{car } \mathrm{e}^x - 1 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x - x - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]0; +\infty\right[, \qquad (f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x - x - 1 = 0).}$$

11. Soit $h : x \mapsto \mathrm{e}^x - x - 1$. La fonction h est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad h'(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h'(x) > 0$. La fonction h est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $h(0) = 0$. Ainsi,

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$
h	0 $\nearrow$

On a $h(0) = 0$ et h strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc pour tout $x > 0$, $h(x) > h(0) = 0$. D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \mathrm{e}^x - x - 1 > 0.$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{e}^x - x - 1 \neq 0$. Donc par la question précédente $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \neq x$. Conclusion,

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = x \text{ n'a pas de solution dans } \left]0; +\infty\right[.}$$