

Devoir Maison 2

Fonctions réelles, trigonométrie

A faire pour le jeudi 19 octobre

Problème I - Fonctions réelles

On considère

$$f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right),$$

Partie 1 : Généralité

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que f est une fonction impaire.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

4. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en 0.
5. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
6. En déduire sans aucun calcul $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
7. Tracer le tableau de variations de f .
8. Montrer que f est une bijection de $\mathcal{D}_f$ dans J , un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera. Que peut-on directement en déduire sur f^{-1} ?

Partie 2 : Etude en $+\infty$

9. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \ln(x)$.
10. En déduire que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$.
11. Préciser alors le comportement asymptotique de f en $+\infty$.

Partie 3 : Introduction aux équations différentielles

On note $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on considère l'équation suivante d'inconnue $g \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$:

$$(E) \quad g''(x) = g(x).$$

On note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E) : $\mathcal{S}_E = \{g \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \mid g'' = g\}$.

12. Déterminer toutes les fonctions constantes solutions de (E) .
13. Soient $(g_1, g_2) \in \mathcal{S}_E^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Posons $h = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$. Montrer que $h \in \mathcal{S}_E$. On dira alors que $\mathcal{S}_E$ est un espace vectoriel.
14. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g : x \mapsto e^{\lambda x}$. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $g \in \mathcal{S}_E$.

On admet dans la suite que $\mathcal{S}_E$ est donné par

$$\mathcal{S}_E = \{g \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \mid \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}\}.$$

Partie 4 : Déterminer de f^{-1} par une équation différentielle

15. Sans calculer f^{-1} , montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad (f^{-1})'(y) = \sqrt{1 + f^{-1}(y)^2}.$$

16. En déduire que f^{-1} est deux fois dérivable puis montrer que f^{-1} vérifie l'équation (E).

Par la partie précédente, on en déduit qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \lambda e^y + \mu e^{-y}.$$

17. Calculer $f^{-1}(0)$ et en déduire $(f^{-1})'(0)$.

18. En déduire λ et μ puis conclure en précisant f^{-1} .

19. Retrouver directement ce résultat par une autre méthode.

Problème II - Trigonométrie

Partie 1 : Une inéquation trigonométrique

On considère l'inéquation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$(I) \quad \sin(3x) + 1 - \cos(2x) - \sin(x) \geq 0.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(3x)$ et $\cos(2x)$ en fonction de $\sin(x)$.
2. En déduire les solutions de (I) dans $\mathbb{R}$ puis représenter sur le cercle les solutions appartenant à $] -\pi; \pi]$.

Partie 2 : Des équations trigonométriques

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E_n) \quad \cos((n+1)x) + \cos(nx) = \sin((n+1)x) + \sin(nx).$$

3. Si $n = 0$, résoudre (E_0) .

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

4. *Méthode 1, par factorisation.*
 - (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $\cos((n+1)x) + \cos(nx)$ et $\sin((n+1)x) + \sin(nx)$.
 - (b) En déduire les solutions de (E_n) . Est-ce cohérent avec la question 3. ?
5. *Méthode 2, par forme polaire.*
 - (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Mettre sous forme polaire $\cos(nx) - \sin(nx)$.
 - (b) En déduire à nouveau les solutions de (E_n) .

Considérons maintenant l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$(F_n) \quad \cos((n-1)x) + \cos(nx) = \sin((n+1)x) + \sin(nx).$$

6. Résoudre (F_0) .
7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos((n-1)x)$ et $\sin((n+1)x)$ en fonction de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$.
8. En déduire les solutions de (F_n) .

Problème III - Fonction complexe

On considère la fonction de la variable complexe suivante

$$f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{z^2 + z + 1}{z - 1}$$

où $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ est l'ensemble de définition de f . On définit également $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Préciser $\mathcal{D}$.
2. Calculer $f(2 - 3i)$.
3. (a) Préciser le module, un argument et la forme algébrique de j .
 (b) Comparer j^2 et $\bar{j}$. Placer j et j^2 sur le cercle trigonométrique.
 (c) Préciser j^3, j^4, j^{2023} .
4. On cherche les zéros de f i.e. les solutions de l'équation $f(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathcal{D}$.
 (a) Soit $z \in \mathcal{D}$. Justifier que si z est un zéro de f alors $\bar{z}$ est aussi un zéro de f .
 (b) Montrer que j et j^2 sont deux zéros de f .
 (c) Développer $(z - j)(z - j^2)$ et en déduire que j et j^2 sont les seuls zéros de f .
5. La fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est-elle bijective ?
6. On souhaite déterminer l'ensemble $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathbb{R}\}$.

- (a) Soit $z \in \mathcal{D}$. Montrer que

$$f(z) \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im}(z) \left(|z|^2 - 2 - 2\operatorname{Re}(z) \right) = 0.$$

- (b) En déduire que l'image réciproque de $\mathbb{R}$ par f est l'union d'une droite (ou presque...) et d'un cercle que l'on déterminera. Représenter graphiquement cet ensemble.

7. Vérifier que pour tout $z \in \mathcal{D}$, $f(z) = \frac{z^3 - 1}{(z - 1)^2}$.

8. Soit $z \in \mathbb{U} \cap \mathcal{D}$.

- (a) Déterminer l'ensemble réel E le plus grand possible auquel appartient $\theta = \arg(z)$.
 (b) Montrer alors que

$$f(z) = -\frac{i}{2} e^{i\frac{\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

- (c) Préciser dans ce cas $\operatorname{Re}(f(z))$.

- (d) Soient $\theta \in]0; \frac{2\pi}{3}]$ et $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Montrer que $\left|f(e^{i\theta})\right| = \frac{3-t^2}{2t\sqrt{1+t^2}}$.