Correction du Devoir Maison 2
fonctions réelles, trigonométrie, complexes

Du jeudi 19 octobre

Problème I - Fonctions réelles

On considère

$$\begin{aligned} f : \mathscr{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right), \end{aligned}$$

Partie 1 : Généralité

1. Soient $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f et $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \mathscr{D}_f \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1+x^2 \geqslant 0 \\ x+\sqrt{1+x^2} > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 \geqslant -1 & \text{toujours vrai} \\ \sqrt{1+x^2} > -x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+x^2} > -x. \end{aligned}$$

Premier cas, si $x > 0$, alors $-x < 0 \leqslant \sqrt{1+x^2}$ et donc $x \in \mathscr{D}_f$.

Second cas, si $x \leqslant 0$, alors,

$$\begin{aligned} x \in \mathscr{D}_f \quad &\Leftrightarrow \quad 1+x^2 > x^2 \qquad \text{car } 1+x^2 \geqslant 0 \text{ et } -x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 > 0 \qquad \text{toujours vrai.} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}.}$$

2. On a les points suivants :

- L'ensemble $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ est centré en 0.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right) \\ &= \ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{1}{-x+\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x^2+1-x^2}\right) \\ &= -\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire.}}$$

3. On a déjà vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 \geqslant 1 > 0$. Par conséquent, la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions qui le sont. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{x+\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1+\frac{\left(1+x^2\right)'}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{car } \sqrt{1+x^2}+x \neq 0. \end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.}$$

4. On calcule :

$$f(0) = \ln\left(0+\sqrt{1}\right) = 0.$$

Puis, par la question précédente, f est dérivable en 0 et

$$f'(0) = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1.$$

Puisque f est dérivable en 0, son graphe admet une tangente dont l'équation est donnée par $y = f'(0)(x-0)+f(0) = x$. Conclusion, l'équation de la tangente au graphe de f en 0 est

$$\boxed{y = x.}$$

5. Puisque $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, par composition, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$ et donc $\lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{1+x^2} = +\infty$. Donc par composition, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

6. La fonction f étant impaire, on en déduit par la symétrie centrale de centre O que

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

7. On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ et la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. A l'aide des deux questions précédentes, on en déduit

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

8. Par ce qui précède, on a
   - f est continue sur $\mathbb{R}$,
   - f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   Donc d'après le théorème de la bijection, la fonction f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans

   $$J = \left] \lim_{x\to-\infty} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x) \right[= \mathbb{R} \qquad \text{(d'après les questions 5. et 6.).}$$

   Conclusion,

   $$\boxed{f \text{ définit une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$$

   De plus, toujours d'après le théorème de la bijection,

   $$\boxed{f^{-1} \text{ est aussi une bijection de } J = \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ continue sur } \mathbb{R} \text{ et strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

Partie 2 : Etude en $+\infty$

9. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a les égalités entre réels suivantes :

   $$\begin{aligned} f(x) - \ln(x) &= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln(x) \\ &= \ln\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}{x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x+x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x}\right) \qquad \text{car } x>0 \\ &= \ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right). \end{aligned}$$

   Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Donc par composition, $\lim_{x\to+\infty} 1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 2$. Toujours par composition, on conclut que

   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) - \ln(x) = \ln(2).}$$

10. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_1(x) = f(x) - \ln(x)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

    $$\frac{f(x)}{x} = \frac{f_1(x)+\ln(x)}{x} = \frac{f_1(x)}{x} + \frac{\ln(x)}{x}.$$

    D'une part, on sait par la question précédente que $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \ln(2)$, donc par quotient,

    $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = 0.$$

    ATTENTION!!!! Une erreur classique est d'écrire $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} \underset{(\bigstar)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2)}{x} = 0$. *Dans ce cas précis, il se trouve que* ($\bigstar$) *reste vraie mais elle présente au correcteur une impression de mauvaise compréhension de ce qu'est une limite : il est absolument interdit de prendre un bout du quotient (ici le numérateur) et de passer à la limite uniquement sur ce bout en laissant le reste fixe alors que* *dans cette limite tout bouge ! Voici un exemple où cette erreur admet des conséquences désastreuses :* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{0}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 0 = 0$*, alors que* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$. *Revenons à notre question.*

On sait de plus que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. Donc par somme de deux limites, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Autrement dit

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x).}$$

11. D'après la question 5., on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De plus, par la question précédente, on a également $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet une branche parabolique de direction } (Ox) \text{ en } +\infty.}$$

12. Toujours d'après le théorème de la bijection, on sait également que f^{-1} est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est de plus continue sur $\mathbb{R}$ et de même stricte monotonie que f. Conclusion,

$\boxed{f^{-1} \text{ est une fonction continue et strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

13. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Partie 3 : Introduction aux équations différentielles

On note $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on considère l'équation suivante d'inconnue $g \in \mathscr{D}_2(\mathbb{R})$:

$$(E) \qquad g''(x) = g(x).$$

On note $\mathscr{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E) : $\mathscr{S}_E = \{g \in \mathscr{D}_2(\mathbb{R}) \mid g'' = g\}$.

14. Soit $C \in \mathbb{R}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C \end{array}$. La fonction g est définie et même deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad g''(x) = 0.$$

Dès lors, on a

$$g \in \mathscr{S}_E \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 = C \quad \Leftrightarrow \quad C = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la seule fonction constante solution de } (E) \text{ est la fonction nulle : } \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array}.}$$

15. Soient $(g_1, g_2) \in \mathscr{S}_E^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Posons $h = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$. Par hypothèse g_1 et g_2 sont deux fonctions de $\mathscr{S}_E$ et donc de $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ et donc g_1 et g_2 sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. On en déduit donc que h est aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$h'' = (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)'' = \lambda_1 g_1'' + \lambda_2 g_2''.$$

Or $g_1 \in \mathscr{S}_E$ donc $g_1'' = g_1$. De même $g_2'' = g_2$. Donc

$$h'' = \lambda_1 \, g_1 + \lambda_2 \, g_2 = h.$$

Conclusion,

$$\boxed{h = \lambda_1 \, g_1 + \lambda_2 \, g_2 \in \mathscr{S}_E.}$$

On dira alors que $\mathscr{S}_E$ est un espace vectoriel.

16. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$. La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction exponentielle et de plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = \lambda \, \mathrm{e}^{\lambda x} \text{ puis } \forall x \in \mathbb{R}, \qquad g''(x) = \lambda^2 \, \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Dès lors,

$$\begin{array}{lllll} g \in \mathscr{S}_E & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, & g''(x) = g(x) & \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, & \lambda^2 \, \mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\lambda x} & \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, & \lambda^2 = 1 & \text{car } \mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda = 1 \ \text{ OU } \ \lambda = -1. & & \end{array}$$

Conclusion,

$$\boxed{g \in \mathscr{S}_E \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = 1 \ \text{ OU } \ \lambda = -1.}$$

On admet dans la suite que $\mathscr{S}_E$ est donné par

$$\mathscr{S}_E = \left\{ g \in D_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = \lambda \, \mathrm{e}^{x} + \mu \, \mathrm{e}^{-x} \right\}.$$

Partie 4 : Déterminer de f^{-1} par une équation différentielle

17. On a vu que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \neq 0$. Ainsi, par ce qui précède, on a

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$,
- f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$.

Donc par le théorème de la dérivée de la réciproque, on en déduit que

$$\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}}$$

et

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, on obtient

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \sqrt{1 + \left(f^{-1}(y)\right)^2}.}$$

18. Par la question précédente, f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $y \in \mathbb{R}$, $1 + \left(f^{-1}(y)\right)^2 \geqslant 1 > 0$. Donc par composée, on en déduit que la fonction $y \mapsto \sqrt{1 + \left(f^{-1}(y)\right)^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc $\left(f^{-1}\right)'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ autrement

$$\boxed{f^{-1} \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \left(f^{-1}\right)'' &= \left(\left(f^{-1}\right)'\right)' \\ &= \left(\sqrt{1+\left(f^{-1}(y)\right)^2}\right)' \\ &= \frac{\left(1+\left(f^{-1}(y)\right)^2\right)'}{2\sqrt{1+\left(f^{-1}(y)\right)^2}} \\ &= \frac{2\left(f^{-1}\right)'(y) f^{-1}(y)}{2\sqrt{1+\left(f^{-1}(y)\right)^2}} \\ &= \frac{2\sqrt{1+\left(f^{-1}(y)\right)^2} f^{-1}(y)}{2\sqrt{1+\left(f^{-1}(y)\right)^2}} \\ &= f^{-1}(y).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f^{-1} \in \mathscr{S}_E.}$$

Par la partie précédente, on en déduit qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(y) = \lambda\, \mathrm{e}^y + \mu\, \mathrm{e}^{-y}.$$

19. On sait que $f(0) = 0$. Donc 0 est sa propre image et donc son propre antécédent. Nécessairement,

$$\boxed{f^{-1}(0) = 0.}$$

Par la question 17. on en déduit que

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(0) = \sqrt{1+\left(f^{-1}(0)\right)^2} = \sqrt{1+0} = 1.}$$

20. On sait que $\forall y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \lambda\, \mathrm{e}^y + \mu\, \mathrm{e}^{-y}$. Donc en $y = 0$,

$$0 = \lambda + \mu \qquad \Leftrightarrow \qquad \mu = -\lambda.$$

De plus, f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \lambda\, \mathrm{e}^y - \mu\, \mathrm{e}^{-y}.$$

Donc en $y = 0$,

$$1 = \left(f^{-1}\right)'(0) = \lambda - \mu.$$

Puisque $\mu = -\lambda$, on obtient $1 = \lambda + \lambda = 2\lambda$. Donc $\boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$ puis $\boxed{\mu = -\lambda = -\frac{1}{2}}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(y) = \frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{2}.}$$

Nous avons déjà croisé cette fonction en tant que « partie impaire » de l'exponentielle. On l'appelle la fonction sinus hyperbolique. Nous l'étudierons prochainement.

21. On cherche à déterminer f^{-1} directement. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x=f^{-1}(y) \quad\Leftrightarrow\quad f(x)=y \quad&\Leftrightarrow\quad \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=y\\ &\Leftrightarrow\quad x+\sqrt{1+x^2}=\mathrm{e}^y \qquad \text{car } x+\sqrt{1+x^2}>0\\ &\Leftrightarrow\quad \sqrt{1+x^2}=\mathrm{e}^y-x\\ &\Leftrightarrow\quad 1+x^2=\mathrm{e}^{2y}-2\,\mathrm{e}^y x+x^2 \ \text{ ET } \ \mathrm{e}^y-x\geqslant 0\\ &\Leftrightarrow\quad 2\,\mathrm{e}^y x=\mathrm{e}^{2y}-1 \ \text{ ET } \ x\leqslant \mathrm{e}^y\\ &\Leftrightarrow\quad x=\frac{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}{2} \ \text{ ET } \ x\leqslant \mathrm{e}^y. \end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{e}^{-y}>0$, on note que si $x=\frac{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}{2}$, dès lors, $x<\frac{\mathrm{e}^y}{2}$. Or $\mathrm{e}^y>0$ donc $\frac{\mathrm{e}^y}{2}<\mathrm{e}^y$. Ainsi, si $x=\frac{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}{2}$, automatiquement, $x\leqslant \mathrm{e}^y$. Finalement,

$$f(x)=y \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall y\in\mathbb{R},\qquad f^{-1}(y)=\frac{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}{2}.}$$

Problème II - Trigonométrie

Partie 1 : Une inéquation trigonométrique

On considère l'inéquation suivante d'inconnue $x\in\mathbb{R}$,

$$(I) \qquad \sin(3x)+1-\cos(2x)-\sin(x)\geqslant 0.$$

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} \sin(3x)&=\sin(2x)\cos(x)+\sin(x)\cos(2x)\\ &=2\sin(x)\cos(x)\cos(x)+\sin(x)\cos^2(x)-\sin(x)\sin^2(x)\\ &=3\sin(x)\cos^2(x)-\sin^3(x)\\ &=3\sin(x)\left(1-\sin^2(x)\right)-\sin^3(x)\\ &=3\sin(x)-4\sin^3(x). \end{aligned}$$

Vérification : si $x=\frac{\pi}{2}$, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$ *et* $3\sin(x)-4\sin^3(x)=3-4=-1$. *Ok.*

De même, directement,

$$\cos(2x)=1-2\sin^2(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\sin(3x)=3\sin(x)-4\sin^3(x) \qquad \text{et} \qquad \cos(2x)=1-2\sin^2(x).}$$

2. Soit $x\in\mathbb{R}$. Par la question précédente,

$$\begin{aligned} (I)\quad&\Leftrightarrow\quad \sin(3x)+1-\cos(2x)-\sin(x)\geqslant 0\\ &\Leftrightarrow\quad 3\sin(x)-4\sin^3(x)+1-1+2\sin^2(x)-\sin(x)\geqslant 0\\ &\Leftrightarrow\quad -4\sin^3(x)+2\sin^2(x)+2\sin(x)\geqslant 0\\ &\Leftrightarrow\quad 2\sin(x)\left(-2\sin^2(x)+\sin(x)+1\right)\geqslant 0. \end{aligned}$$

Posons $X = \sin(x)$. Dès lors,

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad X\left(-2X^2 + X + 1\right) \geqslant 0.$$

Soit Δ le discriminant de $-X^2+X+1$. On a $\Delta = 1+8 = 9$. Donc les racines associées sont $\frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{-1-3}{-4} = 1$. Ainsi, $-2X^2 + X + 1 = -2\left(X + \frac{1}{2}\right)(X-1)$. D'où

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad -2X\left(X + \frac{1}{2}\right)(X-1) \geqslant 0.$$

Or on a le tableau de signe suivant :

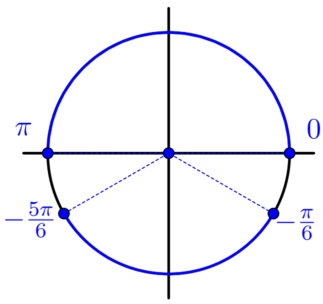
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$-2X$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$X + \frac{1}{2}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$X - 1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2X\left(X+\frac{1}{2}\right)(X-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

On obtient alors

$$\begin{aligned}
(I) \quad &\Leftrightarrow \quad X \leqslant -\frac{1}{2} \ \text{ OU } \ 0 \leqslant X \leqslant 1\\
&\Leftrightarrow \quad \sin(x) \leqslant -\frac{1}{2} \ \text{ OU } \ 0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1\\
&\Leftrightarrow \quad \sin(x) \leqslant -\frac{1}{2} \ \text{ OU } \ 0 \leqslant \sin(x)\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \text{ OU } \ 2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (I) est

$$\boxed{\mathscr{S}_I = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right] \cup \left[2k\pi; (2k+1)\pi\right]\right).}$$



Partie 2 : Une équation trigonométrique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E_n) \qquad \cos\left((n+1)x\right) + \cos\left(nx\right) = \sin\left((n+1)x\right) + \sin\left(nx\right).$$

3. Si $n=0$, on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(E_0) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x)+1=\sin(x)+0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x)-\sin(x)=-1.$$

Passons à la forme polaire :

$$\begin{aligned}
(E_0) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z},\qquad x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \ \text{ OU } \ x+\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z},\qquad x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ \text{ OU } \ x=-\pi+2k\pi.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E_0) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_0=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ;\ \pi+2k\pi \ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}.}$$

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

4. *Méthode 1, par factorisation.*

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par une formule de factorisation, on a

$$\begin{aligned}
\cos((n+1)x)+\cos(nx) &= 2\cos\left(\frac{(n+1)x+nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x-nx}{2}\right)\\
&= 2\cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right).
\end{aligned}$$

   De même,

$$\begin{aligned}
\sin((n+1)x)+\sin(nx) &= 2\sin\left(\frac{(n+1)x+nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x-nx}{2}\right)\\
&= 2\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right).
\end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{\begin{cases}\cos((n+1)x)+\cos(nx)=2\cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\\ \sin((n+1)x)+\sin(nx)=2\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right).\end{cases}}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(E_n) \quad & \Leftrightarrow \quad \cos((n+1)x) + \cos(nx) = \sin((n+1)x) + \sin(nx) \\
& \Leftrightarrow \quad 2\cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) = \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) \quad \text{OU} \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) = 0 \quad \text{OU} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) = 0 \quad \text{OU} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pi + 2k\pi \\
& \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{OU} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pi + 2k\pi \\
& \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{(2n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{OU} \quad x = \pi + 2k\pi \\
& \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{(2n+1)x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{OU} \quad x = \pi + 2k\pi \\
& \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{2(2n+1)} + \frac{2k\pi}{2n+1} \quad \text{OU} \quad x = \pi + 2k\pi \qquad \text{car } 2n+1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E_n) est

$$\boxed{\mathscr{S}_n = \left\{ \frac{\pi}{2(2n+1)} + \frac{2k\pi}{2n+1}\ ;\ \pi + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

Si $n = 0$, on obtient

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ \pi + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$\boxed{\text{Ce qui est bien cohérent avec la question 3.}}$ *(ce que l'on est fort !)*

5. *Méthode 2, par forme polaire.*

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme précédemment, on a

$$\begin{aligned}
\cos(nx) - \sin(nx) &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(nx) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(nx)\right) \\
&= \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(nx) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(nx) \\
&= \sqrt{2}\cos\left(nx + \frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos(nx) - \sin(nx) = \sqrt{2}\cos\left(nx + \frac{\pi}{4}\right).}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. De la même façon, on a aussi,

$$\cos((n+1)x) - \sin((n+1)x) = \sqrt{2}\cos\left((n+1)x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(E_n) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos((n+1)x)+\cos(nx)=\sin((n+1)x)+\sin(nx)\\
&\Leftrightarrow \quad \cos((n+1)x)-\sin((n+1)x)=-(\cos(nx)-\sin(nx))\\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos\left((n+1)x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(nx+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(nx+\frac{\pi}{4}-\pi\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left((n+1)x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(nx-\frac{3\pi}{4}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z},\quad (n+1)x+\frac{\pi}{4}=nx-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\\
&\qquad\qquad\qquad\quad \text{OU}\ \ (n+1)x+\frac{\pi}{4}=-nx+\frac{3\pi}{4}+2k\pi\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z},\quad x=-\pi+2k\pi\ \ \text{OU}\ \ (2n+1)\,x=\pi+2k\pi\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z},\quad x=\pi+2k'\pi\ \ \text{OU}\ \ x=\frac{\pi}{2n+1}+\frac{2k\pi}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve exactement les mêmes solutions (c'est bien fichu les maths),

$$\boxed{\mathscr{S}_n=\left\{\frac{\pi}{2\,(2n+1)}+\frac{2k\pi}{2n+1}\ ;\ \pi+2k\pi\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}.}$$

Considérons maintenant l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{R}$,

$$(F_n) \qquad \cos((n-1)x)+\cos(nx)=\sin((n+1)x)+\sin(nx).$$

6. Soit $x\in\mathbb{R}$. Par parité du cosinus, on a

$$(F_0) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(-x)+1=\sin(x)+0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x)+1=\sin(x) \quad \Leftrightarrow \quad (E_0).$$

   Conclusion, on a les mêmes solutions qu'à la question 3.

$$\boxed{\mathscr{S}_0=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ;\ \pi+2k\pi\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}.}$$

7. Soit $x\in\mathbb{R}$. En développant, on a directement,

$$\boxed{\begin{cases}\cos((n-1)x) &= \cos(nx)\cos(-x)-\sin(nx)\sin(-x)=\cos(nx)\cos(x)+\sin(nx)\sin(x)\\ \sin((n+1)x) &= \sin(nx)\cos(x)+\sin(x)\cos(nx).\end{cases}}$$

8. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a alors,

$$\begin{aligned}
(F_n) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos((n-1)x)+\cos(nx)=\sin((n+1)x)+\sin(nx)\\
&\Leftrightarrow \quad \cos(nx)\cos(x)+\sin(nx)\sin(x)+\cos(nx)\\
&\qquad\qquad\qquad =\sin(nx)\cos(x)+\sin(x)\cos(nx)+\sin(nx)\\
&\Leftrightarrow \quad \cos(nx)(\cos(x)+1-\sin(x))=\sin(nx)(-\sin(x)+\cos(x)+1)\\
&\Leftrightarrow \quad \cos(nx)=\sin(nx)\ \ \text{OU}\ \ \cos(x)+1-\sin(x)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \cos(nx)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-nx\right)\ \ \text{OU}\ \ (E_0)\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z},\quad nx=\frac{\pi}{2}-nx+2k\pi\ \ \text{OU}\ \ nx=-\frac{\pi}{2}+nx+2k\pi\\
&\qquad\qquad\qquad \text{OU}\ \ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ \ \text{OU}\ \ x=\pi+2k\pi \qquad \text{par la question 3.}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z},\quad 2nx=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ \ \text{OU}\ \ 0=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(\text{impossible})\\
&\qquad\qquad\qquad \text{OU}\ \ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ \ \text{OU}\ \ x=\pi+2k\pi\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z},\quad x=\frac{\pi}{4n}+\frac{k\pi}{n}\ \ \text{OU}\ \ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ \ \text{OU}\ \ x=\pi+2k\pi \qquad \text{car } n\neq 0.
\end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_{F_n} = \left\{ \frac{\pi}{4n} + \frac{k\pi}{n} \ ; \ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; \ \pi + 2k\pi \ \middle| \ k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

Problème III - Fonction complexe

On considère la fonction de la variable complexe suivante

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{z^2+z+1}{z-1} \end{aligned}$$

où $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ est l'ensemble de définition de f. On définit également $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$f(z) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad z-1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \neq 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{1\}.}$$

2. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$\begin{aligned} f(2-3i) &= \frac{(2-3i)^2+2-3i+1}{2-3i-1} \\ &= \frac{4-12i-9+3-3i}{1-3i} \\ &= \frac{(-2-15i)(1+3i)}{1+9} \\ &= \frac{-2-6i-15i+45}{10} \\ &= \frac{43-21i}{10}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(2-3i) = \frac{43-21i}{10}.}$$

3. (a) On a directement $\boxed{|j| = \left|\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right| = 1}$ et $\boxed{\arg(j) \equiv \frac{2\pi}{3} \ [2\pi]}$. De plus,

$$\boxed{j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

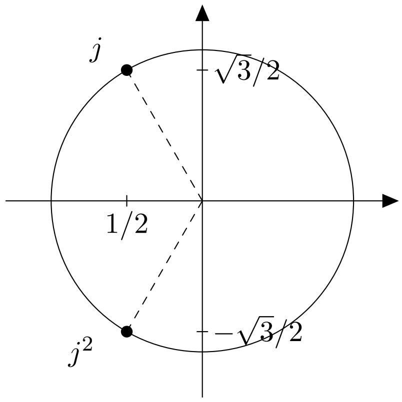
(b) Par la formule de Moivre, on a

$$j^2 = \left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i\left(\frac{4\pi}{3}-2\pi\right)} = \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

D'autre part,

$$\overline{j} = \overline{\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right)} = \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

Conclusion, $\boxed{j^2 = \overline{j}}$ et



(c) Par la formule de Moivre, on a les égalités entre complexes suivantes :

$$j^3 = \left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = \mathrm{e}^{2i\pi} = 1.$$

Par suite,

$$j^4 = j^3 \times j = 1 \times j = j.$$

Enfin,

$$j^{2023} = j^{3\times 674+1} = \left(j^3\right)^{674} \times j = 1^{674} \times j = j.$$

Conclusion,

$$\boxed{j^3 = 1 \qquad \text{et} \qquad j^4 = j^{2023} = j.}$$

4. On cherche les zéros de f i.e. les solutions de l'équation $f(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathcal{D}$.

(a) Soit $z \in \mathcal{D}$. Supposons que z soit un zéro de f. Alors $f(z) = 0$. Par conséquent,

$$0 = \overline{0} = \overline{f(z)} = \overline{\frac{z^2+z+1}{z-1}} = \frac{\overline{z}^2 + \overline{z} + 1}{\overline{z} - 1} = f(\overline{z}).$$

Ainsi $f(\overline{z}) = 0$ *(NB : si $z \in \mathcal{D}$, alors $\overline{z} \in \mathcal{D}$).* Conclusion,

$$\boxed{z \text{ zéro de } f \ \Rightarrow\ \overline{z} \text{ zéro de } f.}$$

(b) On calcule :

$$\begin{aligned} f(j) = \frac{j^2+j+1}{j-1} &= \frac{\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}} + \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} + 1}{\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} - 1} \\ &= \frac{2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 1}{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 1} && \textit{par la formule d'Euler} \\ &= \frac{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc j est bien un zéro de f. Donc par la question précédente, $\overline{j}$ est aussi un zéro de f. Ainsi par la question 3.b, on en déduit que $j^2 = \overline{j}$ est aussi un zéro de f. Conclusion,

$$\boxed{j \text{ et } j^2 \text{ sont des zéros de } f.}$$

(c) Soit $z \in \mathbb{Z}$. On a

$$\begin{aligned}
(z-j)\left(z-j^2\right) &= z^2-\left(j+j^2\right)z+j^3 \\
&= z^2-\left(j+\overline{j}\right)z+1 && \textit{par les questions 3.b et 3.c} \\
&= z^2-2\mathrm{Re}\left(j\right)z+1 \\
&= z^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)z+1 && \textit{par la question 3.a} \\
&= z^2+z+1.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{(z-j)\left(z-j^2\right)=z^2+z+1.}$$

Puis, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on en déduit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
0=f(z) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{z^2+z+1}{z-1}=0 \quad &\Leftrightarrow \quad z^2+z+1=0 \\
&\Leftrightarrow \quad (z-j)\left(z-j^2\right)=0 \\
&\Leftrightarrow \quad z-j=0 \ \text{ OU } \ z-j^2=0 \\
&\Leftrightarrow \quad z=j \ \text{ OU } \ z=j^2.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{j \text{ et } j^2 \text{ sont les seuls zéros de } f.}$$

5. Par la question précédente, on a $f\left(j\right)=0=f\left(j^2\right)$. Or $j \neq j^2$. Donc la fonction f n'est pas injective. Conclusion,

$$\boxed{f : \mathcal{D} \to \mathbb{C} \text{ n'est pas bijective.}}$$

6. On souhaite déterminer l'ensemble $f^{\leftarrow}\left(\mathbb{R}\right)=\{z \in \mathbb{C} \mid f\left(z\right) \in \mathbb{R}\}$.

(a) Soit $z \in \mathcal{D}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f\left(z\right) \in \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad f(z)=\overline{f(z)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z^2+z+1}{z-1}=\overline{\frac{z^2+z+1}{z-1}}=\frac{\overline{z}^2+\overline{z}+1}{\overline{z}-1} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z^2+z+1\right)\left(\overline{z}-1\right)=\left(\overline{z}^2+\overline{z}+1\right)\left(z-1\right) \qquad \textit{car } z\neq 1 \textit{ et donc } \overline{z}\neq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad |z|^2 z+|z|^2+\overline{z}-z^2-z-1=|z|^2\overline{z}+|z|^2+z-\overline{z}^2-\overline{z}-1 \\
&\Leftrightarrow \quad |z|^2\left(z-\overline{z}\right)-2\left(z-\overline{z}\right)-\left(z^2-\overline{z}^2\right)=0 \\
&\Leftrightarrow \quad |z|^2\left(z-\overline{z}\right)-2\left(z-\overline{z}\right)-\left(z-\overline{z}\right)\left(z+\overline{z}\right)=0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z-\overline{z}\right)\left(|z|^2-2-\left(z+\overline{z}\right)\right)=0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2i\mathrm{Im}\left(z\right)\left(|z|^2-2-2\mathrm{Re}\left(z\right)\right)=0.
\end{aligned}$$

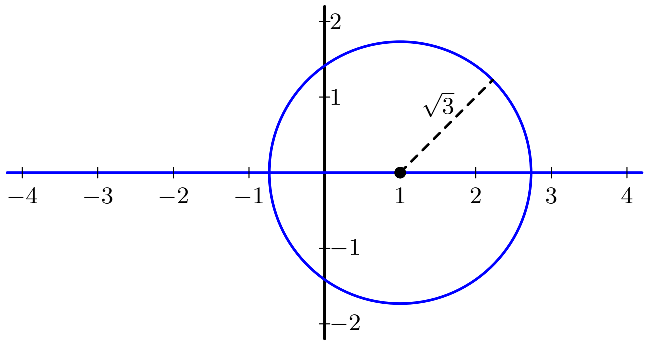
Conclusion,

$$\boxed{f\left(z\right) \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}\left(z\right)\left(|z|^2-2-2\mathrm{Re}\left(z\right)\right)=0.}$$

(b) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z)\left(|z|^2 - 2 - 2\operatorname{Re}(z)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ OU } |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z) - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ OU } |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z) + 1 - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ OU } |z-1|^2 - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ OU } |z-1|^2 = 3 \\
&\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ OU } |z-1| = \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Conclusion, $f^{\leftarrow}(\mathbb{R})$ est l'union de la droite (Ox) privée du point 1 et du cercle de centre 1 et de rayon $\sqrt{3}$.



7. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f(z) = \frac{z^3-1}{(z-1)^2} &\Leftrightarrow \frac{z^2+z+1}{z-1} = \frac{z^3-1}{(z-1)^2} \\
&\Leftrightarrow (z-1)\left(z^2+z+1\right) = z^3 - 1 \\
&\Leftrightarrow z^3 + z^2 + z - z^2 - z - 1 = z^3 - 1 \\
&\Leftrightarrow z^3 - 1 = z^3 - 1.
\end{aligned}$$

La dernière assertion étant toujours vraie, on en déduit que

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \quad f(z) = \frac{z^3-1}{(z-1)^2}.}$$

8. Soit $z \in \mathbb{U} \cap \mathcal{D}$.

(a) On a par hypothèse $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Par conséquent, $\theta = \arg(z) \in \boxed{\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}}$.

(b) Puisque $z \in \mathbb{U}$, $|z| = 1$ et donc $z = \mathrm{e}^{i\theta}$. Ainsi, par la question 7., on a

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z^3-1}{(z-1)^2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{3i\theta}-1}{\left(\mathrm{e}^{i\theta}-1\right)^2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\frac{3i\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{3i\theta}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{3i\theta}{2}}\right)}{\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}-\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}\right)\right)^2} && \textit{par factorisation par l'angle moitié} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\frac{3i\theta}{2}}\,2i\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\mathrm{e}^{i\theta}\left(2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2} && \textit{par la formule d'Euler} \\
&= \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\,\frac{2i\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{-4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(z) = -\frac{i}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\,\frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}.}$$

(c) De la question précédente, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(f(z)) &= \operatorname{Re}\left(-\frac{i}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\,\frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \\
&= -\frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\operatorname{Re}\left(i\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\right) \\
&= -\frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\operatorname{Re}\left(i\cos\frac{\theta}{2}-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Re}(f(z)) = \frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.}$$

(d) Soient $\theta \in \left]0; \frac{2\pi}{3}\right]$, $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $z = \mathrm{e}^{i\theta}$. Par la question 8.b, on a

$$\left|f\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right| = \left|-\frac{i}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\,\frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right|.$$

De plus on observe que

$$\frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\theta+\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos(\theta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin(\theta)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{\sin(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Or $\frac{\theta}{2} \in \left]0; \frac{\pi}{3}\right]$. Par conséquent $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$ et donc

$$\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{t}.$$

De plus par les formules de l'angle moitié, on a

$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Enfin, on sait également que $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - \frac{1}{1+\tan^2(\theta)}$ car rappelons que $\tan'\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 1 + \tan^2(\theta)$. Ainsi, $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2}$. Or $\frac{\theta}{2} \in \left]0; \frac{\pi}{3}\right] \subseteq]0;\pi[$ donc $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$. On en déduit donc que

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

A l'aide de ces trois formules, on trouve donc

$$\frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}} + \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}} \times \frac{1}{t} = \frac{\left(1-t^2\right)\sqrt{1+t^2}}{1+t^2} + \frac{2\sqrt{1+t^2}}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}.$$

D'où,

$$\frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{3-t^2}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Enfin, puisque $\frac{\theta}{2} \in \left]0; \frac{\pi}{3}\right]$, par croissance de la fonction tangente sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on observe que $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \in \left]0; \sqrt{3}\right]$. Dès lors, $t^2 \in]0;3]$ et donc $3 - t^2 \geqslant 0$. Ainsi,

$$\left|f\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right| = \left|\frac{3-t^2}{\sqrt{1+t^2}}\right| = \frac{3-t^2}{2\sqrt{1+t^2}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\left|f\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right| = \frac{3-t^2}{2\sqrt{1+t^2}}.}$$