Devoir Maison 3
Calcul algébrique, fonctions usuelles, équations complexes

A faire pour le jeudi 23 novembre

Problème I - Calcul algébrique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ et $(b_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Partie 1 : Des exemples

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a^n$ et $b_n = 3$. Calculer alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a^n$ et $b_n = b^n$. Calculer alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $a_k = \binom{n}{k}$ et $b_k = 2^k$. Calculer dans ce cas S_n.
4. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n + 1$ et $b_n = n^2$. Calculer alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n.
5. Soient $x \in \mathbb{R}^*$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n = \operatorname{ch}(nx)$.
   (a) Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Développer $\operatorname{ch}(kx)\operatorname{ch}((n-k)x)$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$S_n = \frac{(n+1)\operatorname{ch}(nx)}{2} + \frac{\operatorname{sh}((n+1)x)}{2\operatorname{sh}(x)}.$$
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $a_k = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i+1}$ et $b_k = 1$. Calculer dans ce cas S_n.

Partie 2 : Etude d'un exemple plus poussé

On suppose dans cette partie que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

On obtient alors l'expression suivante de S_n et on pose également T_n par, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k}.$$

7. Calculer successivement a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, S_0, S_1, S_2, S_3. Quelle conjecture peut-on émettre ?
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)\,a_{n+1} = 2\,(2n+1)\,a_n$.
9. A l'aide d'un changement d'indice, montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (k+2)\,a_{k+1}a_{n-k}.$$

10. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 4T_n + 2S_n$.
11. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k a_{n-k}$.
    (b) En déduire une expression de T_n en fonction de S_n.
12. Déduire des questions précédentes une relation de récurrence entre S_{n+1}, a_{n+1} et S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
13. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = a_{n+1}$.
14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$.

Problème II - Fonction usuelle

On considère f définie lorsque c'est possible par $f(x) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}\right)$.

1. Déterminer $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de f puis $\mathscr{D}'$ le domaine de dérivabilité de f.
2. Vérifier que f est périodique.
3. (a) Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.
   (b) En déduire que f n'est ni paire ni impaire.

Simplification de f - Méthode 1

4. (a) Pour tout $x \in \mathscr{D}'$, déterminer $f'(x)$.
   (b) En déduire une expression simplifiée de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.
   (c) En déduire également une expression simplifiée de f sur $\left]\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right[$.
   (d) Vérifier que f est continue en $\frac{\pi}{2}$.
5. Tracer le graphe de f sur $\left[-\frac{3\pi}{2}\,;\,\frac{5\pi}{2}\right]$.

Simplification de f - Méthode 2

Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

6. Exprimer $f(x)$ en fonction de t.
7. En déduire que
$$f(x) = \arccos\left(\frac{\sin(x/2) + \cos(x/2)}{\sqrt{2}}\right).$$
8. Sans dériver, retrouver le résultat de 4.b.

Problème III - Equations complexes

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit
$$P(z) = z^3 - (6+i)\, z^2 + (-14+10i)\, z - 16\,(1+i)\,.$$

1. Déterminer l'ensemble des imaginaires purs $z \in i\mathbb{R}$ tels que $P(z) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = (z+i)\left(az^2 + bz + c\right).$$
3. En déduire l'ensemble des solutions complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $P(z) = 0$.
4. En déduire l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que
$$z^{21} - (6+i)\, z^{14} + (-14+10i)\, z^7 - 16\,(1+i) = 0.$$