Correction du Devoir Maison 3
Calcul algébrique, fonctions usuelles, équations complexes

Du jeudi 23 Novembre

Problème I - Calcul algébrique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ et $(b_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Partie 1 : Des exemples

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a^n$ et $b_n = 3$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors les égalités suivantes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 3a^k.$$

On reconnaît alors une somme géométrique de raison a. Conclusion,

$$\boxed{S_n = \begin{cases} 3\,(n+1) & \text{si } a = 1 \\ 3\frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \end{cases}.}$$

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a^n$ et $b_n = b^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n+1-1} a^k b^{n+1-1-k} = \frac{1}{a-b}\,(a-b) \sum_{k=0}^{n+1-1} a^k b^{n+1-1-k} \qquad \text{car } a \neq b.$$

On reconnaît alors la formule de Bernoulli à l'indice $n+1 \in \mathbb{N}^*$. Donc

$$S_n = \frac{1}{a-b}\left(a^{n+1} - b^{n+1}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $a_k = \binom{n}{k}$ et $b_k = 2^k$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 2^{n-k}.$$

On reconnaît un binôme de Newton. Ainsi,

$$S_n = (1+2)^n = 3^n.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = 3^n.}$$

4. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n+1$ et $b_n = n^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} (k+1)(n-k)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} (k+1)\left(n^2 - 2nk + k^2\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(n^2 k - 2nk^2 + k^3 + n^2 - 2nk + k^2\right) \\ &= n^2 \sum_{k=0}^{n} 1 + \left(n^2 - 2n\right) \sum_{k=0}^{n} k + (1-2n) \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k^3 \end{aligned}$$

Ces sommes étant usuelles, on obtient,

$$\begin{aligned} S_n &= n^2 (n+1) + n(n-2) \frac{n(n+1)}{2} + (1-2n) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2 (n+1)^2}{4} \\ &= \frac{n(n+1)}{12} \left(12n + 6n(n-2) + 2(1-2n)(2n+1) + 3n(n+1)\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{12} \left(12n + 6n^2 - 12n + 2\left(1 - 4n^2\right) + 3n^2 + 3n\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{12} \left(n^2 + 3n + 2\right) \\ &= \frac{n(n+1)(n+1)(n+2)}{12}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \frac{n(n+1)^2 (n+2)}{12}.}$$

5. Soient $x \in \mathbb{R}^*$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n = \operatorname{ch}(nx)$.

   (a) Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(kx) \operatorname{ch}((n-k)x) &= \frac{\mathrm{e}^{kx} + \mathrm{e}^{-kx}}{2} \frac{\mathrm{e}^{(n-k)x} + \mathrm{e}^{-(n-k)x}}{2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{kx+(n-k)x} + \mathrm{e}^{kx-(n-k)x} + \mathrm{e}^{-kx+(n-k)x} + \mathrm{e}^{-kx-(n-k)x}}{4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-(n-2k)x} + \mathrm{e}^{(n-2k)x} + \mathrm{e}^{-nx}}{4} \\ &= \frac{\operatorname{ch}(nx) + \operatorname{ch}((n-2k)x)}{2}. \end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, \qquad \operatorname{ch}(kx) \operatorname{ch}((n-k)x) = \frac{\operatorname{ch}(nx) + \operatorname{ch}((n-2k)x)}{2}.}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition puis la question précédente,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) \operatorname{ch}((n-k)x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{ch}(nx) + \operatorname{ch}((n-2k)x)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(nx) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}((n-2k)x). \end{aligned}$$

La première somme est celle d'une constante car $\operatorname{ch}(nx)$ ne dépend pas du compteur k. Redéveloppons sous forme d'exponentielle la seconde :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(n+1)\operatorname{ch}(nx)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{(n-2k)x} + \mathrm{e}^{-(n-2k)x}}{2} \\ &= \frac{(n+1)\operatorname{ch}(nx)}{2} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{e}^{-2kx} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{e}^{2kx} \\ &= \frac{(n+1)\operatorname{ch}(nx)}{2} + \frac{\mathrm{e}^{nx}}{4}\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{-2x}\right)^k + \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{4}\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{2x}\right)^k. \end{aligned}$$

On reconnait alors deux sommes géométriques de raison $\mathrm{e}^{-2x} \neq 1$ et $\mathrm{e}^{2x} \neq 1$ car $x \neq 0$:

$$S_n = \frac{(n+1)\operatorname{ch}(nx)}{2} + \frac{\mathrm{e}^{nx}}{4}\frac{1-\mathrm{e}^{-2(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-2x}} + \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{4}\frac{\mathrm{e}^{2(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^{2x}-1}.$$

Par factorisation par l'angle moitié,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(n+1)\operatorname{ch}(nx)}{2} + \frac{\mathrm{e}^{nx}}{4}\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{\mathrm{e}^{-x}}\frac{\mathrm{e}^{(n+1)x}-\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}} + \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{4}\frac{\mathrm{e}^{(n+1)x}}{\mathrm{e}^{x}}\frac{\mathrm{e}^{(n+1)x}-\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}} \\ &= \frac{(n+1)\operatorname{ch}(nx)}{2} + \frac{1}{4}\frac{2\operatorname{sh}((n+1)x)}{2\operatorname{sh}(x)} + \frac{1}{4}\frac{2\operatorname{sh}((n+1)x)}{2\operatorname{sh}(x)} \\ &= \frac{(n+1)\operatorname{ch}(nx)}{2} + \frac{\operatorname{sh}((n+1)x)}{2\operatorname{sh}(x)}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \frac{(n+1)\operatorname{ch}(nx)}{2} + \frac{\operatorname{sh}((n+1)x)}{2\operatorname{sh}(x)}.}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $a_k = \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i+1}$ et $b_k = 1$. Par définition, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i+1}.$$

On est donc en présence d'une somme double triangulaire :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{i+1} &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i} \underbrace{\frac{1}{i+1}}_{\text{indépendant de } k} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\sum_{k=0}^{i} 1 \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} \times (i+1) \\ &= \sum_{i=0}^{n} 1 \\ &= n+1. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = n+1.}$$

Partie 2 : Etude d'un exemple plus poussé

On suppose dans cette partie que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

On obtient alors l'expression suivante de S_n et on pose également T_n par, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k}.$$

7. On a les calculs suivants :

$$a_0 = \frac{1}{1}\binom{0}{0} = 1 \qquad a_1 = \frac{1}{2}\binom{2}{1} = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{3}\binom{4}{2} = \frac{1}{3}\frac{4!}{2!2!} = 2 \qquad a_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = \frac{1}{4}\frac{6!}{3!3!} = \frac{5\times 6}{2\times 3} = 5$$

$$a_4 = \frac{1}{5}\binom{8}{4} = \frac{1}{5}\frac{8!}{4!4!} = \frac{8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2} = 2\times 7 = 14.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
S_0 &= a_0 = 1\\
S_1 &= a_0a_1 + a_1a_0 = 1+1 = 2\\
S_2 &= a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0 = 2+1+2 = 5\\
S_3 &= a_0a_3 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_3a_0 = 5+2+2+5 = 14.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{a_0 = a_1 = 1 \qquad a_2 = 2 \qquad a_3 = 5 \qquad a_4 = 14 \qquad S_0 = 1 \qquad S_1 = 2 \qquad S_2 = 5 \qquad S_3 = 14.}$$

On constate que pour tout $n \in [\![0;3]\!]$, $S_n = a_{n+1}$, on conjecture donc que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = a_{n+1}.}$$

8. Calculons. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(n+2)\,a_{n+1} = 2\,(2n+1)\,a_n \quad &\Leftrightarrow \quad (n+2)\,\frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1} = 2\,(2n+1)\,\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} = 2\frac{2n+1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)!}{(n+1)^2\,(n)!\,(n)!} = 2\frac{2n+1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(2n+2)}{n+1} = 2 \quad \textit{car tous les termes sont strictement positifs}\\
&\Leftrightarrow \quad 2 = 2.
\end{aligned}$$

La dernière assertion étant naturellement vraie, on en conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n+2)\,a_{n+1} = 2\,(2n+1)\,a_n.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} T_{n+1} + S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} k a_k a_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} a_k a_{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (k+1)\, a_k a_{n+1-k} \\ &= (0+1)\, a_0 a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1)\, a_k a_{n+1-k} \end{aligned}$$

Par le glissement d'indice $\tilde{k} = k-1$ i.e. $k = \tilde{k}+1$, on a si $k=1$, $\tilde{k}=0$ et si $k=n+1$, $\tilde{k}=n$. On obtient donc

$$\begin{aligned} T_{n+1} + S_{n+1} &= a_{n+1} + \sum_{\tilde{k}=0}^{n} \left(\tilde{k}+2\right) a_{\tilde{k}+1} a_{n+1-\tilde{k}-1} && \textit{car } a_0 = 1 \\ &= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (k+2)\, a_{k+1} a_{n-k} && \textit{car l'indice est muet.} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (k+2)\, a_{k+1} a_{n-k}.}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente, on a

$$T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (k+2)\, a_{k+1} a_{n-k}.$$

Or par la question 8., pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $(k+2)\, a_{k+1} = 2\,(2k+1)\, a_k$. Ainsi,

$$\begin{aligned} T_{n+1} + S_{n+1} &= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} 2\,(2k+1)\, a_k a_{n-k} \\ &= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (4k a_k a_{n-k} + 2 a_k a_{n-k}) \\ &= a_{n+1} + 4 \sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k} + 2 \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \\ &= a_{n+1} + 4T_n + 2S_n. \end{aligned}$$

Conclusion, on a bien montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 4T_n + 2S_n.}$$

11. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par l'inversion d'indice $\tilde{k} = n-k$ i.e. $k = n-\tilde{k}$, si $k=0$, $\tilde{k}=n$ et si $k=n$, $\tilde{k}=0$. On écrit

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k} = \sum_{\tilde{k}=0}^{n} \left(n-\tilde{k}\right) a_{n-\tilde{k}} a_{\tilde{k}}$$

L'indice de sommation étant muet, on obtient bien que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k a_{n-k}.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente, on a $T_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k a_{n-k}$. Donc,

$$T_n = n \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k} = nS_n - T_n.$$

Autrement dit

$$2T_n = nS_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_n = \frac{n}{2} S_n.}$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question 10., on a

$$T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 4T_n + 2S_n.$$

Or d'après la question précédente, $T_{n+1} = \frac{n+1}{2} S_{n+1}$ et $T_n = \frac{n}{2} S_n$. Ainsi,

$$\frac{n+1}{2} S_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 4\frac{n}{2} S_n + 2S_n \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + (2n+2)\, S_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2\,(n+1)\, S_n.}$$

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathscr{P}(n)$: « $S_n = a_{n+1}$ ». Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $n = 0$. Alors, on a déjà vu que $S_0 = 1 = a_1$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie i.e. $S_n = a_{n+1}$. Alors, par la question précédente,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{2}{n+3} a_{n+1} + \frac{2}{n+3} 2\,(n+1)\, S_n && \textit{car } n+3>0 \\ &= \frac{2}{n+3} a_{n+1} + \frac{4\,(n+1)}{n+3} a_{n+1} && \textit{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{4n+6}{n+3} a_{n+1}. \end{aligned}$$

Or par la question 8. au rang $n+1$, on a $(n+3)\, a_{n+2} = 2\,(2n+2+1)\, a_{n+1} = 2\,(2n+3)\, a_{n+1}$. Ainsi,

$$S_{n+1} = \frac{4n+6}{n+3} \frac{n+3}{2\,(2n+3)} a_{n+2} = a_{n+2}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est alors aussi vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = a_{n+1}.}$$

14. On procède par récurrence forte. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $a_n \in \mathbb{N}$. »

Initialisation. Par la question 7. $a_0 = 1 \in \mathbb{N}$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $(\forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathscr{P}(k) \text{ vraie}) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ vraie. Supposons que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie :

$$\forall k \in [\![0;n]\!], \qquad a_k \in \mathbb{N}.$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par la question précédente,

$$a_{n+1} = S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Or pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $a_k \in \mathbb{N}$. De même si $k \in [\![0;n]\!]$, alors $n-k \in [\![0;k]\!]$, donc $a_{n-k} \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $a_k a_{n-k} \in \mathbb{N}$. Donc en sommant,

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \in \mathbb{N}$$

et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n \in \mathbb{N}.}$$

Problème II - Fonction usuelle

On considère f définie lorsque c'est possible par $f(x) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}\right)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1+\sin(x)}{2} \geqslant 0 \\ \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}} \in [-1\,;\,1] \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{1+\sin(x)}{2} \leqslant 1 \\ & \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 1+\sin(x) \leqslant 2 \\ & \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1. \end{aligned}$$

La dernière assertion étant toujours vraie, on en déduit que l'ensemble de définition de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R}.}$$

Poursuivons. Soit $x \in \mathbb{R}$. En notant $\mathscr{D}'$ le domaine de dérivabilité de f, puisque la fonction arccos n'est dérivable que sur $]-1\,;\,1[$ et que la fonction racine carrée n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \mathscr{D}' \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1+\sin(x)}{2} > 0 \\ \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}} \in]-1\,;\,1[\end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{1+\sin(x)}{2} < 1 \\ & \Leftrightarrow \quad 0 < 1+\sin(x) < 2 \\ & \Leftrightarrow \quad -1 < \sin(x) < 1 \\ & \Leftrightarrow \quad x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]\,. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{D}' = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

2. L'ensemble $\mathbb{R} = \mathscr{D}$ est stable par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+2\pi) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x+2\pi)}{2}}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}\right) = f(x),$$

car la fonction sinus est 2π-périodique. Donc $\boxed{f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}}$.

3. (a) On a les calculs suivants :

$$f(0) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1+\sin(0)}{2}}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

De plus

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Enfin,

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(0) = \frac{\pi}{4}, \qquad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}, \qquad f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}.}$$

(b) On constate que $f\left(\frac{\pi}{6}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ donc f n'est pas paire. De plus $f\left(\frac{\pi}{6}\right) \neq -f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ donc f n'est pas impaire. Conclusion, $\boxed{f \text{ n'est ni paire ni impaire}}$.

Simplification de f - Méthode 1

4. (a) Par définition de $\mathscr{D}'$, la fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}'$. De plus pour tout $x \in \mathscr{D}'$, on a

$$f'(x) = -\frac{\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}\right)^2}} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1+\sin(x))'}{2\sqrt{1+\sin(x)}}}{\sqrt{1-\frac{1+\sin(x)}{2}}} = -\frac{\cos(x)}{2\sqrt{2\left(1+\sin(x)\right)\left(1-\frac{1+\sin(x)}{2}\right)}}$$
$$= -\frac{\cos(x)}{2\sqrt{(1+\sin(x))(1-\sin(x))}}$$
$$= -\frac{\cos(x)}{2\sqrt{1-\sin^2(x)}}$$
$$= -\frac{\cos(x)}{2\sqrt{\cos^2(x)}}$$
$$= -\frac{\cos(x)}{2\left|\cos(x)\right|}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D}', \qquad f'(x) = -\frac{\cos(x)}{2\left|\cos(x)\right|}.}$$

(b) Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos(x) > 0$ donc $|\cos(x)| = \cos(x)$ et donc par la question précédente, que l'on peut utiliser car $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\subseteq \mathscr{D}'$, on a

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[, \qquad f'(x) = -\frac{1}{2}.$$

Or $x \mapsto -\frac{x}{2}$ est une primitive de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[, \qquad f(x) = -\frac{x}{2} + C_1.$$

Or d'après la question 3.a, on a $f(0) = \frac{\pi}{4}$. Donc $\frac{\pi}{4} = -\frac{0}{2} + C_1 = C_1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[, \qquad f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}.}$$

(c) De la même façon, on a pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right[$, $\cos(x) < 0$, donc $|\cos(x)| = -\cos(x)$. De plus, $\left]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right[\subseteq \mathscr{D}'$, donc d'après la question 4.a, on a

$$\forall x \in \left]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right[, \qquad f'(x) = \frac{1}{2}.$$

Or $x \mapsto \frac{x}{2}$ est une primitive de f sur $\left]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right[$. Ainsi, il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \left]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right[, \qquad f(x) = \frac{x}{2} + C_2.$$

Or, on a $f(\pi) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$. Donc $\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + C_2$ i.e. $C_2 = -\frac{\pi}{4}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right[, \qquad f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}.}$$

(d) D'après les résultats précédents, on a les trois points suivants

(i) $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0.$

(ii) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1+1}{2}}\right) = \arccos(1) = 0.$

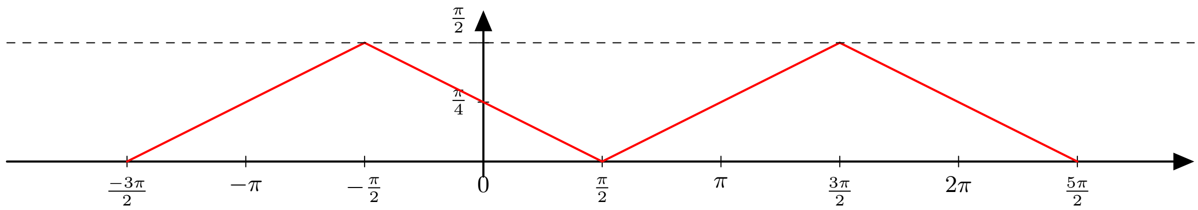
(iii) $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0.$

Donc

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} f(x) = 0$$

et $\boxed{f \text{ est bien continue en } \frac{\pi}{2}.}$

5. En utilisant les questions 4.b et 4.c et en complétant par la 2π-périodicité de f. On obtient le graphe suivant :



Simplification de f - Méthode 2

Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$. On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

6. On sait par les formules de l'angle moitié que $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$. Donc,

$$f(x) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1 + \frac{2t}{1+t^2}}{2}}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1 + t^2 + 2t}{2\,(1+t^2)}}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{(1+t)^2}{2\,(1+t^2)}}\right)$$

Or $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\frac{x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right]$ puis par croissance de la fonction tangente sur cet ensemble, $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \in [-1 ; 1]$. Ainsi $1 + t \geqslant 0$. D'où

$$\boxed{f(x) = \arccos\left(\frac{1+t}{\sqrt{2\,(1+t^2)}}\right).}$$

7. On sait que $1+t^2 = 1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ (formule de la dérivée de la fonction tangente). Donc

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{\frac{2}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}}\right) = \arccos\left(\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\frac{\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|}{\sqrt{2}}\right)$$

Or $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. Donc $\frac{x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ et donc $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant 0$. Ainsi,

$$f(x) = \arccos\left(\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right)$$

Conclusion, on a bien montré que

$$\boxed{f(x) = \arccos\left(\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right).}$$

8. Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. On construisant la forme normalisée, on obtient à partir de la question précédente que

$$f(x) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Enfin comme $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, on a $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right] \subseteq \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ (vérification importante !). Donc

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}.$$

Conclusion, nous retrouvons bien le résultat suivant :

$$\boxed{\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right], \qquad f(x) = \frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}.}$$

Problème III - Equations complexes

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit

$$P(z) = z^3 - (6+i)\,z^2 + (-14+10i)\,z - 16\,(1+i)\,.$$

1. Soit $z \in i\mathbb{R}$. Il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $z = iy$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
P(z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad P(iy) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad (iy)^3 - (6+i)(iy)^2 + (-14+10i)\,iy - 16\,(1+i) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad -iy^3 + (6+i)\,y^2 + (-10-14i)\,y - 16\,(1+i) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\left(-iy^3 + (6+i)\,y^2 + (-10-14i)\,y - 16\,(1+i)\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \left(6y^2 - 10y - 16\right) + i\left(-y^3 + y^2 - 14y - 16\right) = 0.
\end{aligned}$$

Or $y \in \mathbb{R}$. Donc $6y^2 - 10y - 16 \in \mathbb{R}$ et $-y^3 + y^2 - 14y - 16 \in \mathbb{R}$. Donc par unicité de la forme algébrique :

$$P(iy) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6y^2 - 10y - 16 = 0 & (E_1)\\ -y^3 + y^2 - 14y - 16 = 0. & (E_2)\end{cases}$$

Commençons par résoudre (E_1) : $6y^2 - 10y - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3y^3 - 5y - 8 = 0$ d'inconnu $y \in \mathbb{R}$. Soit Δ son discriminant : $\Delta = 25 - 12 \times (-8) = 25 + 96 = 121 = (11)^2 > 0$. Donc (E_1) admet deux solutions **réelles** :

$$(E_1) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{5+11}{6} = \frac{8}{3} \quad \text{OU} \quad y = \frac{5-11}{6} = -1.$$

NB : $\frac{8}{3} \times (-1) = -\frac{8}{3} = \frac{c}{a}$ *OK !*

Or si $y = \frac{8}{3}$, alors

$$\begin{aligned}(E_2) \quad &\Leftrightarrow \quad -\left(\frac{8}{3}\right)^3 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 14 \times \frac{8}{3} - 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{64 \times 8}{27} + \frac{64}{9} - \frac{112}{3} - 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{-512 + 192}_{<0} - 1008 - 16 \times 27 = 0 \qquad \text{impossible.}\end{aligned}$$

Si $y = -1$,

$$\begin{aligned}(E_2) \quad &\Leftrightarrow \quad -(-1)^3 + (-1)^2 - 14(-1) - 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 + 1 + 14 - 16 = 0 \qquad \text{vrai}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$P(iy) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -1 \quad \Leftrightarrow \quad z = -i.$$

Conclusion l'unique complexe imaginaire pur solution de l'équation $P(z) = 0$ est $z = -i$.

$$\boxed{\forall z \in i\mathbb{R}, \qquad P(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = -i.}$$

2. Par la question précédente, $-i$ est une racine de P. Donc $z + i$ divise P.

Méthode 1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$(z + i)\left(az^2 + bz + c\right) = az^3 + bz^2 + cz + iaz^2 + ibz + ic = az^3 + (b + ia)\,z^2 + (c + ib)\,z + ic.$$

Donc pour que $P(z) = (z + i)\left(az^2 + bz + c\right)$, IL SUFFIT (a priori la condition n'est pas forcément nécessaire) de résoudre le système suivant :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} a = 1 \\ -6 - i = b + ia \\ -14 + 10i = c + ib \\ -16 - 16i = ic. \end{cases}$$

Or on a les équivalences suivantes :

$$\mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 - i - ai = -6 - i - i = -6 - 2i \\ c = -14 + 10i - ib = -14 + 10i + 6i - 2 = -16 + 16i \\ c = \frac{-16 - 16i}{i} = 16i - 16. \end{cases}$$

Ainsi, en posant,

$$a = 1, \qquad b = -6 - 2i, \qquad c = -16 + 16i,$$

on a alors

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = (z + i)\left(z^2 - (6 + 2i)\,z - 16 + 16i\right).}$$

Méthode 2. Par division euclidienne.

$$\begin{array}{cccc|l} X^3 & -(6+i)\,X^2 & +(-14+10i)\,X & -16\,(1+i) & X + i \\ \cline{5-5} -(X^3 & +iX^2) & & & X^2 + (-6-2i)\,X - 16 + 16i \\ \cline{1-2} & (-6-2i)\,X^2 & +(-14+10i)\,X & -16\,(1+i) & \\ & -((-6-2i)\,X^2 & +(-6i+2)\,X) & & \\ \cline{2-3} & & (-16+16i)\,X & -16\,(1+i) & \\ & & -((-16+16i)\,X & -16i-16) & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

On obtient donc $a = 1$, $b = -6 - 2i$ et $c = -16 + 16i$,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = (z+i)\left(z^2 - (6+2i)\,z - 16 + 16i\right).}$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après la question précédente, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P(z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (z+i)\left(z^2 - (6+2i)\,z - 16 + 16i\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z + i = 0 \qquad \text{OU} \qquad z^2 - (6+2i)\,z - 16 + 16i = 0. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de $z^2 - (6+2i)\,z - 16 + 16i$. On a

$$\Delta = (6+2i)^2 - 4\,(-16+16i) = 36 + 24i - 4 + 64 - 64i = 96 - 40i = 4\,(24 - 10i) = 8\,(12 - 5i).$$

Soit $\omega = x + iy \in \mathbb{C}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \omega^2 = 12 - 5i \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+iy)^2 = 12 - 5i \\ |\omega|^2 = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \\ 2xy = -5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = \frac{25}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \\ 2xy = -5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \text{OU} \qquad \begin{cases} x = -\frac{5\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc pour tout $\delta \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} \delta^2 = \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \delta &= 2\sqrt{2}\left(\frac{5\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \text{OU} \qquad \delta &= 2\sqrt{2}\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 10 - 2i & &= -10 + 2i. \end{aligned}$$

On en déduit donc les deux racines du trinôme :

$$z^2 - (6+2i)\,z - 16 + 16i = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \frac{6 + 2i + 10 - 2i}{2} = 8 \;\text{ OU }\; z = \frac{6 + 2i - 10 + 2i}{2} = -2 + 2i.$$

En revenant aux équivalences précédentes, on conclut que

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = -i \qquad \text{OU} \qquad z = 8 \qquad \text{OU} \qquad z = -2 + 2i.}$$

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $\omega = z^7$ et considérons l'équation

$$(E) \qquad z^{21} - (6+i)\,z^{14} + (-14 + 10i)\,z^7 - 16\,(1+i) = 0.$$

En utilisant la question précédente, on a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \omega^3 - (6+i)\,\omega^2 + (-14+10i)\,\omega - 16\,(1+i) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad P(\omega) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \omega = -i \qquad \text{OU} \qquad \omega = 8 \qquad \text{OU} \qquad \omega = -2 + 2i \\ &\Leftrightarrow \quad z^7 = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}} \qquad \text{OU} \qquad z^7 = 8 \qquad \text{OU} \qquad z^7 = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0;6]\!], \qquad z = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{14} + \frac{2ik\pi}{7}} \qquad \text{OU} \qquad z = \sqrt[7]{8}\,\mathrm{e}^{i\frac{2ik\pi}{7}} \qquad \text{OU} \qquad z = 2^{3/14}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{28} + \frac{2ik\pi}{7}} \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{14} + \frac{2ik\pi}{7}} \;\middle|\; k \in [\![0;6]\!] \right\} \cup \left\{ 2^{3/7}\,\mathrm{e}^{i\frac{2ik\pi}{7}} \;\middle|\; k \in [\![0;6]\!] \right\} \cup \left\{ 2^{3/14}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{28} + \frac{2ik\pi}{7}} \;\middle|\; k \in [\![0;6]\!] \right\}.}$$