Devoir Maison 4
Calculs d'intégrales, équations différentielles

A faire pour le jeudi 14 décembre

Problème I - Calcul d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $f \in \mathscr{C}([1;\mathrm{e}], \mathbb{R})$, on pose

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(x)^n}{n!x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Partie 1 : Point de départ, des petits exemples

1. Justifier que pour tout $f \in \mathscr{C}([1;\mathrm{e}], \mathbb{R})$ et tout $n \in \mathbb{N}$, I_n existe.
2. Calculer pour tout $f \in \mathscr{C}([1;\mathrm{e}], \mathbb{R})$, I_0.
3. Calculer I_1 lorsque $f : x \mapsto \frac{x}{x-4}$.

Partie 2 : Un petit détour par l'arctangente

On cherche à calculer *(une envie soudaine...)* : $J = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(\mathrm{e})} \frac{t}{\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

4. Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ à déterminer tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$.
5. En déduire I_1 lorsque $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$.
6. A l'aide d'une intégration par parties, en déduire I_1 lorsque $f = \arctan$.
7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, simplifier $\sin^2(\arctan(x))$.
8. A l'aide des questions précédentes et d'un changement de variable, montrer que

$$J = \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\,\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2+1}\right).$$

Partie 3 : Passage obligé par la limite

On suppose dans toute la suite que $f = \ln$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [1;\mathrm{e}]$, $f_n(x) = \frac{f(x)^n}{n!x^2}$.

9. Calculer I_1.
10. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [1;\mathrm{e}]$ on a $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{n!}$.
11. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, un encadrement de I_n.
12. Calculer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie 4 : Destination, la constante de Neper

13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{u^n \, \mathrm{e}^{-u}}{n!} \, \mathrm{d}u$.

14. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n+1} = -\frac{1}{\mathrm{e}(n+1)!} + I_n.$$

15. Démontrer alors proprement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} + I_0$.

16. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Problème II - Equations différentielles

L'objectif de ce problème est de résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle d'ordre 2 à coefficients non constants suivante :

$$(E) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 y''(x) - x y'(x) + y(x) = x^3 - \frac{1}{x}$$

Partie 1 : L'ordre 1 c'est déjà bien

On considère l'équation (F) suivante d'inconnue $y \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(F) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x y'(x) + y(x) = x - \frac{1}{x^3}$$

1. Déterminer $\mathscr{S}_{F_0}$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène (F_0) associée à (F). *On donnera les solutions sous forme ensemble et sous forme d'espace engendré.*

2. Résoudre l'équation (F).

3. Justifier qu'il existe une unique solution f de (F) vérifiant $f(1) = 2$, puis déterminer-la.

4. La courbe $\mathscr{C}_f$ de f admet-elle une asymptote au voisinage de $+\infty$? *Justifier avec soin.*

Partie 2 : L'ordre 2 c'est encore mieux - Méthode 1

On considère l'équation (E_0), dite homogène associée à (E), d'inconnue $y \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(E_0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 y''(x) - x y'(x) + y(x) = 0$$

5. Montrer que l'équation (E_0) admet une unique solution de la forme $y_0(x) = x^\alpha$ où α est une constante à déterminer.

6. Soit $y \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad k(x) = \frac{y(x)}{x}$$
   (a) Justifier que la fonction k est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer l'équivalence suivante :
$$\big[\text{la fonction } y \text{ est solution de } (E)\big] \iff \big[\text{la fonction dérivée } k' \text{ est solution de } (F)\big]$$

7. En déduire l'ensemble $\mathscr{S}_E$ des solutions de l'équation (E).

Partie 3 : L'ordre 2, c'est merveilleux - Méthode 2

On rappelle que $\mathscr{S}_E$ désigne l'ensemble des solutions de (E) et on note $\mathscr{S}_G$ l'ensemble des solutions de l'équation (G) suivante d'inconnue $z \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$(G) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad z''(t) - 2z'(t) + z(t) = \mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-t}$$

8. Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}_{G_0}$ des solutions de l'équation homogène (G_0) associée à (G).
   On donnera les solutions sous forme ensemble et sous forme d'espace engendré.
9. En déduire avec soin l'ensemble $\mathscr{S}_G$ des solutions de l'équation (G).

Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = y(\mathrm{e}^t) \quad \text{i.e.} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = z(\ln(x))$$

10. Justifier que la fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
11. Montrer l'équivalence suivante :
$$z \in \mathscr{S}_G \iff y \in \mathscr{S}_E$$
12. En déduire $\mathscr{S}_E$.

Partie 4 : Kèskecékeça ? Une équation fonctionnelle ?

On considère l'équation (P) suivante d'inconnue $y \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(P) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) = xy\left(\frac{1}{x}\right) + x^2$$

On note $\mathscr{S}_P$ l'ensemble des solutions de (P).

13. Soit $y \in \mathscr{S}_P$.
    (a) Justifier que la fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
    (b) Exprimer $y'(\frac{1}{x})$ en fonction de $y(x)$ et x pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
    (c) Montrer que y est nécessairement solution de (E).
14. En déduire $\mathscr{S}_P$.