Correction du Devoir Maison 4
Calcul d'intégrales et équations différentielles

Du jeudi 14 Décembre

Problème I - Calcul d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $f \in \mathscr{C}([1;\mathrm{e}], \mathbb{R})$, on pose

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(x)^n}{n!x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Partie 1 : Point de départ, des petits exemples

1. Soient $f \in \mathscr{C}([1;\mathrm{e}], \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [1;\mathrm{e}]$, $n!x^2 \neq 0$. Posons $g : x \mapsto \frac{f(x)^n}{n!x^2}$. La fonction g est alors bien définie et même **continue** sur **le segment** $[1;\mathrm{e}]$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc I_n existe. Conclusion,

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{C}([1;\mathrm{e}], \mathbb{R}), \ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n \text{ existe.}}$$

2. Soit $f \in \mathscr{C}([1;\mathrm{e}], \mathbb{R})$. Si $n = 0$, on a pour tout $x \in [1;\mathrm{e}]$, $\frac{f(x)^n}{n!x^2} = \frac{1}{x^2}$. Donc

$$I_0 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=\mathrm{e}} = -\frac{1}{\mathrm{e}} + 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{C}([1;\mathrm{e}], \mathbb{R}), \qquad I_0 = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.}$$

3. Si $f : x \mapsto \frac{x}{x-4}$ et $n = 1$. On note que $\forall x \in [1;\mathrm{e}]$, $x - 4 \neq 0$ donc f est bien définie et même continue sur $[1;\mathrm{e}]$. De plus,

$$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{x^2(x-4)}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x(x-4)}\,\mathrm{d}x.$$

On procède à une décomposition en éléments simples. Posons pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;4\}$, $F(x) = \frac{1}{x(x-4)}$. Par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0;4\}, \qquad F(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-4}.$$

De plus,

$$a = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} xF(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{4}$$

et

$$b = \lim_{\substack{x \to 4 \\ x \neq 4}} (x-4)F(x) = \lim_{\substack{x \to 4 \\ x \neq 04}} \frac{1}{x} = \frac{1}{4}.$$

Donc pour tout $x \in [1;\mathrm{e}]$,

$$F(x) = -\frac{1/4}{x} + \frac{1/4}{x-4}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{4}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\left[\ln(|x-4|) - \ln(|x|)\right]_{x=1}^{x=\mathrm{e}} \\ &= \frac{1}{4}\left(\ln(|\mathrm{e}-4|) - \ln(|\mathrm{e}|) - \ln(|-3|) + \ln(|1|)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\ln(4-\mathrm{e}) - 1 - \ln(3)\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I_1 = \frac{\ln(4-\mathrm{e}) - \ln(3) - 1}{4}.}$$

Partie 2 : Un petit détour par l'arctangente

On cherche à calculer *(une envie soudaine...)* : $J = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(\mathrm{e})} \frac{t}{\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

4. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*,\quad \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^*,\quad \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a\left(x^2+1\right) + bx^2 + cx}{x(x^2+1)} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^*,\quad 1 = (a+b)x^2 + cx + a \qquad \text{car } x \neq 0. \end{aligned}$$

On note alors qu'IL SUFFIT de prendre

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b=-a=-1 \\ c=0 \\ a=1. \end{cases}$$

Donc, pour $a=1$, $b=-1$ et $c=0$, on a bien

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\qquad \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.}$$

5. Supposons $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$. Pour tout $x \in [1;\mathrm{e}]$, $1+x^2 \neq 0$, donc f est bien continue sur $[1;\mathrm{e}]$ et

$$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$$

Par la question précédente,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\ln(|x|) - \frac{1}{2}\ln\left(\left|x^2+1\right|\right)\right]_{x=1}^{x=\mathrm{e}} \\ &= \ln(\mathrm{e}) - \ln(1) - \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^2+1\right) + \frac{1}{2}\ln(2) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\,\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2+1}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\,\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2+1}\right).}$$

6. Si $f = \arctan$. On note que f est bien définie sur $[1; \mathrm{e}]$ et

$$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\arctan(x)}{x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Posons pour tout $x \in [1; \mathrm{e}]$, $\begin{cases} u(x) = -\frac{1}{x} \\ v(x) = \arctan(x) \end{cases}$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[1; \mathrm{e}]$ et pour tout $x \in [1; \mathrm{e}]$, $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x^2} \\ v'(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$. Donc par intégration par parties :

$$I_1 = \left[-\frac{\arctan(x)}{x} \right]_{x=1}^{x=\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} -\frac{1}{x\,(1+x^2)}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x\,(1+x^2)}\, \mathrm{d}x.$$

Donc par la question précédente,

$$\boxed{I_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2\,\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2 + 1} \right).}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\sin^2(\arctan(x)) = 1 - \cos^2(\arctan(x))$. De plus, $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ donc appartient au domaine de définition et de dérivabilité de la fonction tangente et

$$\tan'(\arctan(x)) = \frac{1}{\cos^2(\arctan(x))} = 1 + \tan^2(\arctan(x)) = 1 + x^2.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Puis,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin^2(\arctan(x)) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin^2(\arctan(x)) = \frac{x^2}{1+x^2}.}$$

8. Soit $J = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(\mathrm{e})} \frac{t}{\sin^2(t)}\, \mathrm{d}t$. On observe que à partir de J, pour retrouver les bornes de I_1, il faut poser pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{4}; \arctan(\mathrm{e})\right] \subseteq \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $x = \tan(t)$ i.e. $t = \arctan(x)$ car $t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ (important !!). Si $t = \frac{\pi}{4}$, $x = 1$ et si $t = \arctan(\mathrm{e})$, $x = \mathrm{e}$. La fonction arctan est $\mathscr{C}^1$ sur $[1; \mathrm{e}]$ et pour tout $x \in [1; \mathrm{e}]$, $\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$. Ainsi,

$$J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(\mathrm{e})} \frac{t}{\sin^2(t)}\, \mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\arctan(x)}{\sin^2(\arctan(x))} \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Or, par la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2(\arctan(x)) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Donc

$$J = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\arctan(x)}{\frac{x^2}{1+x^2}} \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\arctan(x)}{x^2}\, \mathrm{d}x.$$

On retrouve le I_1 de la question 6. Conclusion,

$$\boxed{J = \frac{\pi}{4} - \frac{\arctan(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2\,\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2 + 1} \right).}$$

Partie 3 : Passage obligé par la limite

On suppose dans toute la suite que $f = \ln$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [1; \mathrm{e}]$, $f_n(x) = \frac{f(x)^n}{n! x^2}$.

9. On observe que ln est bien continue sur $[1; \mathrm{e}]$. Par définition,
$$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x^2}\, \mathrm{d}x.$$
Posons pour tout $x \in [1; \mathrm{e}]$, $\begin{cases} u(x) = -\frac{1}{x} \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[1; \mathrm{e}]$ et pour tout $x \in [1; \mathrm{e}]$, $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x^2} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$. Donc par intégration par parties,
$$\begin{aligned} I_1 &= \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_{x=1}^{x=\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} -\frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + 0 + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=\mathrm{e}} \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}} + 1 \\ &= 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{I_1 = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}.}$$

10. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [1; \mathrm{e}]$. On a les implications suivantes :
$$1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(\mathrm{e}) = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \ln^n(x) \leqslant 1.$$
D'autre part,
$$1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad 1 \leqslant x^2 \leqslant \mathrm{e}^2 \quad \Rightarrow \quad 0 < n! \leqslant n! x^2 \leqslant n!\, \mathrm{e}^2 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{n!\, \mathrm{e}^2} \leqslant \frac{1}{n! x^2} \leqslant \frac{1}{n!}.$$
Les termes étant tous positifs, on en déduit que
$$0 \leqslant \frac{\ln^n(x)}{n! x^2} \leqslant \frac{1}{n!}.$$
Conclusion :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [1; \mathrm{e}], \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{n!}.}$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens (!!), on déduit de la question précédente que
$$\underbrace{\int_1^{\mathrm{e}} 0\, \mathrm{d}t}_{=0} \leqslant \underbrace{\int_1^{\mathrm{e}} f_n(t)\, \mathrm{d}t}_{=I_n} \leqslant \underbrace{\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{n!}\, \mathrm{d}t}_{=\frac{\mathrm{e}-1}{n!}}.$$
Par conséquent
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n!}.}$$

12. On sait que $\lim_{n \to +\infty} n! = +\infty$ et par suite $\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{e}}{n!} = 0 = \lim_{n \to +\infty} 0$. Dès lors, par le théorème d'encadrement et la question précédente, on en déduit que
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.}$$

Partie 4 : Destination, la constante de Neper

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons pour tout $x \in [1;\mathrm{e}]$, $u = \ln(x)$ i.e. $x = \mathrm{e}^u$. Si $x = 1$, $u = 0$ et si $x = \mathrm{e}$, $u = 1$. La fonction $u \mapsto \mathrm{e}^u$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$. Ainsi, on a

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^n(x)}{n!x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{u^n}{n!\,\mathrm{e}^{2u}}\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u^n\,\mathrm{e}^{-u}}{n!}\,\mathrm{d}u.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \int_0^1 \frac{u^n\,\mathrm{e}^{-u}}{n!}\,\mathrm{d}u.}$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons pour tout $x \in [1;e]$,

$$\begin{cases} u(x) = \frac{-1}{(n+1)!x} \\ v(x) = \ln^{n+1}(x). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[1;e]$ et

$$\forall x \in [1;e], \qquad \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{(n+1)!x^2} \\ v'(x) = \frac{n+1}{x}\ln^n(x). \end{cases}$$

On obtient alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{-1}{(n+1)!x} \times \ln^{n+1}(x)\right]_{x=1}^{x=\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{-1}{(n+1)!x}\,\frac{n+1}{x}\ln^n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{-1}{(n+1)!\,\mathrm{e}} + 0 + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^n(x)}{n!x^2}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

On retrouve bien la formule voulue

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!\,\mathrm{e}} + I_n.} \tag{1}$$

Remarque : on pouvait aussi appliquer l'IPP sur l'expression de I_n obtenue à la question précédente.

15. Démontrons la formule par récurrence. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(n) : \qquad « \; I_{n+1} = -\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!} + I_0 \; ».$$

Initialisation. Si $n = 0$ alors $I_{n+1} = I_1$. Donc d'après (1),

$$I_1 = -\frac{1}{(1)!\,\mathrm{e}} + I_0 = -\frac{1}{\mathrm{e}} + I_0 = -\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k!} + I_0.$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors, d'après (1),

$$I_{n+2} = -\frac{1}{\mathrm{e}}\frac{1}{(n+2)!} + I_{n+1}.$$

Donc par $P(n)$, l'hypothèse de récurrence, on a

$$I_{n+2} = -\frac{1}{\mathrm{e}}\frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!} + I_0 = -\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{k!} + I_0.$$

Par conséquent $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie i.e.

$$\boxed{I_{n+1} = -\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!} + I_0.}$$

16. Soit $n \geqslant 1$. En utilisant la question précédente, on obtient que

$$I_n = -\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} + I_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = I_0 - I_n \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = \mathrm{e}\left(I_0 - I_n\right).$$

Dès lors,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = 1 + \mathrm{e}\left(I_0 - I_n\right).$$

Or d'après la question 12., on sait que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 1 + \mathrm{e}\, I_0.$$

Or d'après la question 2., $I_0 = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 1 + \mathrm{e}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = 1 + \mathrm{e} - 1.$$

Finalement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \mathrm{e}\,.}$$

N'est-ce pas ravissant ?!

Problème II - Equations différentielles

L'objectif de ce problème est de résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle d'ordre 2 à coefficients non constants suivante :

$$(E) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = x^3 - \frac{1}{x}$$

Partie 1 : L'ordre 1 c'est déjà bien

On considère l'équation (F) suivante d'inconnue $y \in \mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(F) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad xy'(x) + y(x) = x - \frac{1}{x^3}$$

1. On a :
$$(F_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xy'(x) + y(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = 0$$
La fonction $a : x \mapsto \frac{1}{x}$ est **continue** sur **l'intervalle** $\mathbb{R}_+^*$ donc admet des primitives dont l'une est donnée sur $\mathbb{R}_+^*$ par $A : x \mapsto \ln(x)$. Puis,
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \mathrm{e}^{-A(x)} = \mathrm{e}^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}.$$
Conclusion :
$$\boxed{\mathscr{S}_{F_0} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\lambda}{x} \end{array} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}.}$$

2. On a :
$$(F) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad xy'(x) + y(x) = x - \frac{1}{x^3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = 1 - \frac{1}{x^4}.$$
Les fonctions $a : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $b : x \mapsto 1 - \frac{1}{x^4}$ sont **continues** sur **l'intervalle** $\mathbb{R}_+^*$.
   - *(Résolution de (F_0))* Déjà faite à la question 1..
   - *(Recherche d'une solution particulière y_p de (F)).* Procédons à la méthode de variation de la constante. Soit $y_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$. La fonction y_0 est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $y_0 \in \mathscr{S}_{F_0}$. Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
   $$\lambda = \frac{y}{y_0} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \lambda\, y_0 \qquad\qquad \text{car } y_0 \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R}_+^*.$$
   La fonction λ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont. On a les équivalences suivantes :
   $$\begin{aligned} y \text{ solution de } (F) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = 1 - \frac{1}{x^4} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda'(x) y_0(x) + \underbrace{\lambda(x) y_0'(x) + \lambda(x) y_0(x)}_{=0 \text{car } y_0 \in \mathscr{S}_{F_0}} = 1 - \frac{1}{x^4} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda'(x) \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x^4} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda'(x) = x - \frac{1}{x^3} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} + C \\ &\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = \lambda(x) y_0(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x^3} + \frac{C}{x} \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des fonctions solutions de (F) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_F = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{2} + \frac{1}{2x^3} + \frac{C}{x} \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

3. Déterminer une solution de (F) vérifiant $f(1) = 2$ consiste exactement à résoudre le problème de Cauchy suivant d'inconnue $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = 1 - \frac{1}{x^4} \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Par unicité au problème de Cauchy, on sait d'avance qu'il existe une unique fonction solution à ce système.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) + \frac{1}{x} f(x) = 1 - \frac{1}{x^4} \\ f(1) = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} f \in \mathscr{S}_F \\ f(1) = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x^3} + \frac{C}{x} \\ 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + C \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x^3} + \frac{C}{x} \\ C = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'unique solution de (F) vérifiant $f(1) = 2$ est

$$\boxed{f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2x^3}. \end{array}}$$

4. On a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Puis,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}.$$

Et enfin,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) = 0.$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C}_f \text{ admet la droite d'équation } y = \frac{x}{2} \text{ comme asymptote oblique.}}$$

Partie 2 : L'ordre 2 c'est encore mieux - Méthode 1

5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $y_0 : x \mapsto x^\alpha$ est deux fois dérivable sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$, et on a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y_0 : x \mapsto x^\alpha \text{ solution de } (E_0) &\Leftrightarrow \forall x \in I, \quad x^2 y_0''(x) - x y_0'(x) + y_0(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, \quad x^\alpha(\alpha(\alpha - 1) - \alpha + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = 1 \end{aligned}$$

Conclusion : l'unique solution de (E_0) de la forme $x \mapsto x^\alpha$ est

$$\boxed{y_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}.}$$

Remarque : on peut vérifier de tête que $x \mapsto x$ est une solution de (E_0).

6. (a) La fonction $k : x \mapsto \frac{y(x)}{x}$ est le quotient de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et son dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Conclusion :

$$\boxed{\text{la fonction } k \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

(b) Sachant que y et k sont deux fois dérivables sur $I = \mathbb{R}_+^*$, calculons pour tout $x \in I$:

$$y'(x) = k'(x)x + k(x) \qquad \text{et} \qquad y''(x) = k''(x)x + 2k'(x)$$

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rlrcl}
\left[y \text{ solution de } (E)\right] & \Leftrightarrow \forall x \in I, & x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) & = & x^3 - \dfrac{1}{x} \\
& \Leftrightarrow \forall x \in I, & x^2(k''(x)x + 2k'(x)) - x(k'(x)x + k(x)) + k(x)x & = & x^3 - \dfrac{1}{x} \\
& \Leftrightarrow \forall x \in I, & (x^3)k''(x) + (2x^2 - x^2)k'(x) + (-x + x)k(x) & = & x^3 - \dfrac{1}{x} \\
& \Leftrightarrow \forall x \in I, & xk''(x) + k'(x) & = & x - \dfrac{1}{x^3} \\
& \Leftrightarrow \left[\text{la fonction dérivée } k' \text{ est solution de } (F)\right] & & &
\end{array}$$

Conclusion,

$$\boxed{y \text{ solution de } (E) \qquad \Leftrightarrow \qquad k' \text{ est solution de } (F).}$$

7. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rlrcl}
\left[y \text{ est solution de } (E)\right] & \Leftrightarrow & \left[\text{la fonction dérivée } k' \text{ est solution de } (F)\right] & & \\
& \Leftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad k'(x) & = & \dfrac{\lambda}{x} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2x^3} \\
& \Leftrightarrow & \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad k(x) & = & \lambda \ln(x) + \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{4x^2} + \mu \\
& \underset{y : x \mapsto k(x)x}{\Leftrightarrow} & \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad y(x) & = & (\mu + \lambda \ln(x))x + \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{1}{4x}
\end{array}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ y \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\mu + \lambda \ln(x))x + \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{1}{4x} \end{array} \middle| \, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Partie 3 : L'ordre 2, c'est merveilleux - Méthode 2

8. L'équation homogène (G_0) associée à l'équation (G) est :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad z''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0.$$

Son équation caractéristique associée (G_C) est : $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0$. Le trinôme $r^2 - 2r + 1$ admet donc une racine double $r_0 = 1$ et on en déduit alors que son discriminant $\Delta = 0$. Conclusion, l'ensemble $\mathscr{S}_{G_0}$ de toutes les solutions de (G_0) est :

$$\boxed{\mathscr{S}_{G_0} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\lambda + \mu t)\,\mathrm{e}^t \end{array} \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Ou encore

$$\boxed{\mathscr{S}_{G_0} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^t \end{array}, \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t\,\mathrm{e}^t \end{array} \right).}$$

9.
- *(Démarche pour chercher z_p une SP de (G))*
  Par principe de superposition, une solution particulière sera donnée par $z_p = z_3 - z_{-1}$ où

  $$z_\alpha \text{ désigne une solution particulière de } (G_\alpha) \quad z'' - 2z' + z = \mathrm{e}^{\alpha t} \text{ pour } \alpha \in \{-1, 3\}$$

- *(Recherche de z_α une solution particulière de (G_α) pour $\alpha \in \{-1, 3\}$)*
  Soit $\alpha \in \{-1, 3\}$. L'équation différentielle (G_α) est de la forme $az'' + bz' + cz = f(t)$ avec :

  $$a = 1 \neq 0 \quad , \quad b = -2 \quad , \quad c = 1 \quad , \quad f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$$

  où f est une fonction continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$.
  Comme $f : t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha} = K\,\mathrm{e}^{mt}$ avec $K = 1$ et $m = \alpha \neq 1$ n'est pas racine de (G_C), donc on peut chercher $\boxed{\text{UNE}}$ solution particulière z_α de (G_α) sous la forme :

  $$z_\alpha : t \mapsto a_0\,\mathrm{e}^{\alpha t} \quad \text{où } a_0 \text{ est une constante à déterminer.}$$

  La fonction z_α est deux fois dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

  $$z_\alpha(x) = a_0\,\mathrm{e}^{\alpha t} \qquad z'_\alpha(t) = a_0\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha t} \qquad z''_\alpha(t) = a_0\alpha^2\,\mathrm{e}^{\alpha t}$$

  On a les équivalences suivantes :

  $$\begin{array}{llrcl} z_\alpha \text{ est } \boxed{\text{UNE}} \text{ solution particulière de } (G_\alpha) & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, & z''_\alpha(t) - 2z'_\alpha(t) + z_\alpha(t) & = & \mathrm{e}^{\alpha t} \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, & a_0(\alpha^2 - 2\alpha + 1)\,\mathrm{e}^{\alpha t} & = & \mathrm{e}^{\alpha t} \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, & a_0(\alpha - 1)^2\,\mathrm{e}^{\alpha t} & = & \mathrm{e}^{\alpha t} \\ & \Leftrightarrow & a_0 & \underset{\alpha \neq 1}{=} & \dfrac{1}{(\alpha - 1)^2} \end{array}$$

  $\boxed{\text{UNE}}$ solution particulière de l'équation (G_α) est donc :

  $$z_\alpha : \left| \begin{array}{rcl} I = \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & z_\alpha(t) = \dfrac{1}{(\alpha - 1)^2}\,\mathrm{e}^{\alpha t} \end{array} \right.$$

- Ainsi, $\boxed{\text{UNE}}$ solution particulière de (G) est :

$$z_p : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & z_p(t) = z_3(t) - z_{-1}(t) = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{3t} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-t} \end{array} \right.$$

Conclusion :, l'ensemble $\mathscr{S}_G$ de $\boxed{\text{TOUTES}}$ les solutions de (G) est :

$$\boxed{\mathscr{S}_G = \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\lambda + \mu t)\,\mathrm{e}^t + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{3t} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-t} \end{array} \middle| \; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

10. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. Or la fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$, donc par composition, il vient que la fonction $z : t \mapsto y(\mathrm{e}^t)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Conclusion :

$$\boxed{\text{la fonction } z \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

11. Sachant que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, calculons pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$z'(t) = \mathrm{e}^t\, y'(\mathrm{e}^t) \qquad \text{et} \qquad z''(t) = \mathrm{e}^{2t}\, y''(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^t\, y'(\mathrm{e}^t)$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lcllcl} z \in \mathscr{S}_G & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, & (\mathrm{e}^{2t}\, y''(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^t\, y'(\mathrm{e}^t)) - 2(\mathrm{e}^t\, y'(\mathrm{e}^t)) + y(\mathrm{e}^t) & = & \mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-t} \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, & \mathrm{e}^{2t}\, y''(e^t) - \mathrm{e}^t\, y(\mathrm{e}^t) + y(\mathrm{e}^t) & = & \mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-t} \\ & \underset{x=\mathrm{e}^t}{\Leftrightarrow} & \forall x \in \mathbb{R}_*^+, & x^2 y''(x) - x y'(x) + y(x) & = & x^3 - \dfrac{1}{x} \\ & \Leftrightarrow & y \in \mathscr{S}_E & & & \end{array}$$

Conclusion,

$$\boxed{z \in \mathscr{S}_G \qquad \Leftrightarrow \qquad y \in \mathscr{S}_E.}$$

12. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lcl} y \in \mathscr{S}_E & \Leftrightarrow & z \in \mathscr{S}_G \\ & \underset{q9)}{\Leftrightarrow} & \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall t \in \mathbb{R}, z(t) = (\lambda + \mu t) e^t + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{3t} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-t} \\ & \underset{y : x \mapsto z(\ln(x))}{\Leftrightarrow} & \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\; y(x) = (\lambda + \mu \ln(x))\,\mathrm{e}^{\ln(x)} + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{3\ln(x)} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-\ln(x)} \\ & \Leftrightarrow & \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\; y(x) = (\lambda + \mu \ln(x)) x + \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{1}{4x} \end{array}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ y : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\lambda + \mu \ln(x)) x + \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{1}{4x} \end{array} \middle| \; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Remarque : on retrouve le même résultat qu'à la question 7.

Partie 4 : Kèskecékeça ? Une équation fonctionnelle ?

13. Soit $y \in \mathscr{S}_P$.

   (a) La fonction y est solution de (P), donc y est dérivable sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et par composition la fonction $x \mapsto y\left(\frac{1}{x}\right)$ l'est également. On en déduit que la fonction $x \mapsto xy\left(\frac{1}{x}\right) + x^2$ est dérivable sur I par produit et somme de fonctions qui le sont. Or la fonction y est solution de (P), donc vérifie $y' = \left(x \mapsto xy\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\right)$ qui est alors dérivable sur I. Conclusion :

$$\boxed{y \text{ est deux fois dérivable sur } I.}$$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme y est solution de (P), il vient que :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*,\ y'(u) = uy\left(\frac{1}{u}\right) + u^2$$

   L'égalité ci-dessus étant vraie pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, elle est en particulier vraie pour $u = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$, ce qui permet d'écrire :

$$y'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}y(x) + \frac{1}{x^2}$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ y'(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}y(x) + \frac{1}{x^2}.}$$

   (c) Montrons que y est solution de (E) i.e. $\begin{cases} y \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}_+^* & (i) \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = x^3 - \frac{1}{x} & (ii) \end{cases}$.

   (i) Faite à la question 13.a.

   (ii) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} y''(x) &= (y'(x))' = \left(xy\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\right)' = x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) y'\left(\frac{1}{x}\right) + y\left(\frac{1}{x}\right) + 2x \\ &= -\frac{1}{x}y'\left(\frac{1}{x}\right) + y\left(\frac{1}{x}\right) + 2x \underset{q15b)}{=} -\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}y(x) + \frac{1}{x^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{x}y'(x) - x}_{\text{car } y \in \mathscr{S}_P} + 2x \\ &= \frac{1}{x}y'(x) - \frac{1}{x^2}y(x) - \frac{1}{x^3} + x \end{aligned}$$

   Ainsi, $x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = x^3 - \frac{1}{x}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } y \text{ est nécessairement solution de } (E).}$$

14. Raisonnons par analyse-synthèse.

   - *Analyse (recherche des candidats solutions pour (P)).*
     Soit y une solution de (P).
     Alors, par la question précédente, la fonction y est solution de (E), donc, par la question 7. ou 12., il existe deux constantes réelles λ et μ telles que :

$$y : x \longmapsto (\lambda + \mu\ln(x))x + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{4x}$$

     Les fonctions y définies par les expressions ci-dessus sont des candidats solutions de (P).

- *Synthèse (parmi ces candidats solutions, lesquels sont vraiment des solutions ?) :*
  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
  Si $y : x \mapsto (\lambda + \mu \ln(x))x + \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{1}{4x}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$y'(x) = (\lambda + \mu \ln(x)) + \mu + \frac{3x^2}{4} + \frac{1}{4x^2}$$

$$xy\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 = x\left[\left(\lambda + \mu \ln \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} + \frac{1}{4x^3} - \frac{x}{4}\right] + x^2 = \lambda - \mu \ln(x) + \frac{3x^2}{4} + \frac{1}{4x^2}$$

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lllrcl}
y \text{ est solution de } (P) & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & y'(x) & = & xy\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \\
 & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & (\lambda + \mu \ln(x)) + \mu + \frac{3x^2}{4} + \frac{1}{4x^2} & = & \lambda - \mu \ln(x) + \frac{3x^2}{4} + \frac{1}{4x^2} \\
 & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \mu(1 + 2\ln x) & = & 0 \\
 & \Leftrightarrow & & \mu & = & 0
\end{array}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_P = \left\{ y : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda x + \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{1}{4x} \end{array} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}}.$$