Devoir Maison 5
Matrices et analyse asymptotique

A faire pour le jeudi 18 janvier

Problème I - Matrices

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition I.1

Une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant 1i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite STOCHASTIQUE si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1. les coefficients de la matrice sont tous positifs ou nuls : $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0$.
2. la somme des coefficients de chaque ligne de la matrice est égale à 1 : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

Définition I.2

Une suite de matrices (carrées de taille n) $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} = \left(\left((b_p)_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)_{p\in\mathbb{N}} \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ CONVERGE vers une matrice $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si les coefficients de B_p convergent vers le coefficient de B situé à la même position : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (b_p)_{i,j} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} b_{i,j}$.

Durant une période de l'année, on étudie la dynamique d'une espèce présente sous trois formes : chenille, chrysalide, papillon. On observe que chaque jour,

- la moitié des chenilles forme des chrysalides tandis que l'autre moitié reste chenilles,
- la moitié des chrysalides forme des papillons tandis que l'autre moitié reste chrysalides,
- tous les papillons restent papillon.

Au jour $p \in \mathbb{N}$, on pioche un individu au hasard et on note a_p, b_p, c_p la probabilité respectivement que l'individu soit chenille, chrysalide, papillon. Au jour 0 la population n'est constituée que de chenilles : $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$. On admet que pour tout $p \in \mathbb{N}$, (cf formule des probabilités totales au second semestre)

$$\begin{cases} a_{p+1} = \frac{1}{2}a_p \\ b_{p+1} = \frac{1}{2}a_p + \frac{1}{2}b_p \\ c_{p+1} = \frac{1}{2}b_p + c_p. \end{cases}$$

On pose $\forall p \in \mathbb{N},\ X_p = \begin{bmatrix} a_p \\ b_p \\ c_p \end{bmatrix}$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie 1 : L'algèbre au service des probabilités (et donc des papillons)

1. Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, a_p puis montrer que $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ que vaut $a_p + b_p + c_p$? Le démontrer.
3. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer une relation matricielle entre X_{p+1}, A^T et X_p.
4. Soit $p \in \mathbb{N}$. En déduire une expression de X_p en fonction A^p et X_0.

Partie 2 : Tout le monde sera papillon un jour

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Calculer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
6. Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A = \alpha I_3 + \beta J$.
7. En déduire les puissances de A.
8. Montrer que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge, et que sa limite $A_\infty = \lim\limits_{p\to+\infty} A^p$ est une matrice stochastique.
9. En déduire pour tout $p \in \mathbb{N}$, une expression de b_p et c_p en fonction de p. Préciser $\lim\limits_{p\to+\infty} b_p$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} c_p$. Quelle conclusion lépidoptérologique peut-on faire ?

Partie 3 : Les matrices aussi savent muer

Posons $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

10. Déterminer, suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble E_λ des vecteurs $U = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $BX = \lambda X$.
11. Vérifier que $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in E_{1/2}$ et $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \in E_1$.
12. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
13. Calculer $P^{-1}BP$.
14. En déduire pour tout $p \in \mathbb{N}$, B^p en fonction de A^p, P et P^{-1}.
15. Soit $p \in \mathbb{N}$. En déduire les coefficients de B^p.

Partie 4 : Des polynômes pas pusillanimes, plutôt parfaits pour papillon

Soit $P = X^3 - 2X^2 + \frac{5}{4}X - \frac{1}{4}$. On fixe $p \in \mathbb{N}$.

16. Calculer P' le polynôme dérivé de P. Préciser $P'\left(\frac{1}{2}\right)$.
17. Calculer $P(A)$.
18. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
19. On admet qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tels que $X^p = PQ + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$. On admet alors que l'on a également par dérivation $pX^{p-1} = P'Q + PQ' + 2\alpha X + \beta$. Démontrer que
$$\alpha = 4 - \frac{p+1}{2^{p-2}}, \quad \beta = \frac{2+3p}{2^{p-1}} - 4, \quad \gamma = 1 - \frac{p}{2^{p-1}}$$
20. En déduire à nouveau l'expression de A^p.

Partie 5 : Si un battement d'aile de papillon peut tout changer, le groupe des matrices stochastiques lui reste stoïque par produit.

21. Soient A et B deux matrices stochastiques. Montrer que AB est une matrice stochastique.

22. Soit A une matrice stochastique. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est stochastique.

23. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Montrer que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} \leqslant 1$.

Soit $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

24. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.
    (a) Calculer AX_1. *On justifiera avec soin.*
    (b) En déduire que la matrice $I_n - A$ n'est pas inversible.

25. Montrer le résultat suivant :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \big[\,A \text{ est stochastique}\,\big] \Leftrightarrow \big[\,AX_1 = X_1 \text{ et les coefficients de } A \text{ sont positifs}\,\big]$$

Exercice II - DL et applications

Les trois questions sont indépendantes.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{1+x}}$.

2. A l'aide d'un développement asymptotique de $f : x \mapsto \frac{1}{x}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$, déterminer si $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$. Si oui préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote et sinon préciser le comportement de f en $+\infty$.

3. A l'aide d'un développement limité déterminer la tangente en 0 de $f : x \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^{3x} + \ln(1+x)}$ et la position de $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f par rapport à cette tangente.

Problème III - Un problème de Cauchy via un développement limité

On considère le problème de Cauchy suivant d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(\mathscr{P}) \qquad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + xy'(x) + y(x) = 1 \\ y'(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique solution à $(\mathscr{P})$. On note y cette unique solution.

Partie 1 : Même quand on n'y connaît rien, on peut en dire beaucoup.

1. Pourquoi le cours ne permet-il pas d'affirmer l'existence et l'unicité de la solution de $(\mathscr{P})$?
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, que y est de classe $\mathscr{C}^n$.
3. (a) Soit $z : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y(-x) \end{array}$. Montrer que z est une solution de $(\mathscr{P})$.
   (b) En déduire que y est paire.

Partie 2 : Une initiation à un raisonnement de série entière, un an avant l'heure !

On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

4. Justifier que y admet un développement limité à l'ordre $2n$ en 0. On le note et que celui-ci est donné par
$$y(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k + o\left(x^{2n}\right),$$
Justifier que pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $a_{2k+1} = 0$.
5. Préciser a_0 puis a_2.
6. Justifier que y' et y'' ont des développements limités à l'ordre $2n-1$ et $2n-2$ respectivement et montrer que
$$y''(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n-2} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k + o\left(x^{2n-2}\right)$$
$$y'(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=1}^{2n-1} (k+1) a_{k+1} x^k + o\left(x^{2n-1}\right).$$
7. A l'aide de l'équation différentielle, établir une relation de récurrence de a_{2k+2} en fonction de a_{2k} pour tout $k \in [\![1\,;\,n-1]\!]$.
8. En déduire que pour tout $k \in [\![1\,;\,n-1]\!]$, $a_{2k} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^k k!}$.

Partie 3 : Comment peut-on douter de la beauté des mathématiques ?

9. Reconnaitre que la partie régulière du développement limité de y à l'ordre $2n-2$ est celui d'une fonction sous la forme $\mathrm{e}^{u(x)}$ où l'on déterminera $u(x)$.
10. Vérifier que la fonction obtenue à la question précédente est bien notre solution recherchée.