Correction du Devoir Maison 5
Matrices et analyse asymptotique

Du jeudi 18 janvier

Problème I - Matrices

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition I.1

Une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant 1 i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite STOCHASTIQUE si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1. les coefficients de la matrice sont tous positifs ou nuls : $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0$.
2. la somme des coefficients de chaque ligne de la matrice est égale à 1 : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

Définition I.2

Une suite de matrices (carrées de taille n) $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} = \left(\left((b_p)_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right)_{p\in\mathbb{N}} \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ CONVERGE vers une matrice $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si les coefficients de B_p convergent vers le coefficient de B situé à la même position : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (b_p)_{i,j} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} b_{i,j}$.

Durant une période de l'année, on étudie la dynamique d'une espèce présente sous trois formes : chenille, chrysalide, papillon. On observe que chaque jour,

- la moitié des chenilles forme des chrysalides tandis que l'autre moitié reste chenilles,
- la moitié des chrysalides forme des papillons tandis que l'autre moitié reste chrysalides,
- tous les papillons restent papillon.

Au jour $p \in \mathbb{N}$, on pioche un individu au hasard et on note a_p, b_p, c_p la probabilité respectivement que l'individu soit chenille, chrysalide, papillon. Au jour 0 la population n'est constituée que de chenilles : $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$. On admet que pour tout $p \in \mathbb{N}$, (cf formule des probabilités totales au second semestre)

$$\begin{cases} a_{p+1} = \frac{1}{2}a_p \\ b_{p+1} = \frac{1}{2}a_p + \frac{1}{2}b_p \\ c_{p+1} = \frac{1}{2}b_p + c_p. \end{cases}$$

On pose $\forall p \in \mathbb{N},\ X_p = \begin{bmatrix} a_p \\ b_p \\ c_p \end{bmatrix}$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie 1 : L'algèbre au service des probabilités (et donc des papillons)

1. D'après l'énoncé, on a
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{p+1} = \frac{1}{2}a_p.$$
La suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$:
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_p = \frac{1}{2^p}a_0.$$

Toujours d'après l'énoncé, $a_0 = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_p = \frac{1}{2^p}.}$$

En particulier, $\boxed{(a_p)_{p\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$ et

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} a_p = 0.}$$

2. Posons pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(p)$: « $a_p + b_p + c_p = 1$ ».

   Initialisation. Si $p = 0$, $a_0 + b_0 + c_0 = 1 + 0 + 0 = 1$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(p) \Rightarrow \mathscr{P}(p+1)$. Supposons $\mathscr{P}(p)$ vraie : $a_p + b_p + c_p = 1$. Dès lors,

$$a_{p+1} + b_{p+1} + c_{p+1} = \frac{1}{2}a_p + \frac{1}{2}a_p + \frac{1}{2}b_p + \frac{1}{2}b_p + c_p = a_p + b_p + c_p = 1.$$

   Donc $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.

   Conclusion, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(p)$ est vraie :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \qquad a_p + b_p + c_p = 1.}$$

3. Soit $p \in \mathbb{N}$. Par définition, puis les relations de récurrence données par l'énoncé,

$$X_{p+1} = \begin{bmatrix} a_{p+1} \\ b_{p+1} \\ c_{p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_p \\ \frac{1}{2}a_p + \frac{1}{2}b_p \\ \frac{1}{2}b_p + c_p \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_p \\ b_p \\ c_p \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T X_p = A^T X_p.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad X_{p+1} = A^T X_p.}$$

4. Posons pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(p)$: « $X_p = (A^p)^T X_0$ ».

   Initialisation. Si $p = 0$, par convention $A^0 = I_3$. Donc $(A^p)^T X_0 = I_3^T X_0 = I_3 X_0 = X_0 = X_p$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(p) \Rightarrow \mathscr{P}(p+1)$. Supposons $\mathscr{P}(p)$ vraie : $X_p = (A^p)^T X_0$. Dès lors,

$$\begin{aligned} X_{p+1} &= A^T X_p && \text{par la question précédente} \\ &= A^T (A^p)^T X_0 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (A^p A)^T X_0 && \text{par propriété de la transposée} \\ &= \left(A^{p+1}\right)^T X_0. \end{aligned}$$

   Donc $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.

   Conclusion, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(p)$ est vraie :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \qquad X_p = (A^p)^T X_0.}$$

Partie 2 : Tout le monde sera papillon un jour

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. On a les égalités matricielles suivantes :

$$J^0 = I_3 \qquad J^1 = J \qquad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis,

$$J^3 = J^2 J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J^2.$$

De même, $J^4 = J^3 J = J^2 J = J^3 = J^2$. On intuite alors que $\forall k \geqslant 2$, $J^k = J^2$. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$: « $J^k = J^2$ ».

Initialisation. Si $k = 2$. $J^2 = J^2$ donc $\mathscr{P}(2)$ est bien sûr vraie.

Hérédité. Soit $k \geqslant 2$. Montrons que $\mathscr{P}(k) \Rightarrow \mathscr{P}(k+1)$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie : $J^k = J^2$. Montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie i.e. $J^{k+1} = J^2$. On a les égalités matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} J^{k+1} = J^k \times J &= J^2 \times J && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= J^3 = J^2 && \text{d'après le calcul précédent.} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $k \in \geqslant 2$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad J^k = \begin{cases} I_3 & \text{si } k = 0 \\ J & \text{si } k = 1 \\ J^2 & \text{si } k \geqslant 2. \end{cases}}$$

6. On observe que

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I_3 + \frac{1}{2} J.$$

Conclusion, pour $\boxed{\alpha = \beta = \frac{1}{2}}$, on a

$$\boxed{A = \frac{1}{2} I_3 + \frac{1}{2} J.}$$

7. On observe que $I_3 J = J I_3$, I_3 et J commutent, on a donc le droit d'appliquer la formule du binôme de Newton. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a les égalités dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$\begin{aligned} A^p = \frac{1}{2^p}(I_3 + J)^p &= \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} J^k I_3^{p-k} && \textit{par la formule du binôme de Newton} \\ &= \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} J^k. \end{aligned}$$

Supposons $p \geqslant 2$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
A^p &= \frac{1}{2^p}\left[I_3 + \binom{p}{1}J + \sum_{k=2}^{p}\binom{p}{k}J^2\right] \qquad car\ \forall k \geqslant 2\ ,\ J^k = J^2 \\
&= \frac{1}{2^p}\left[I_3 + pJ + \left(\sum_{k=2}^{p}\binom{p}{k}\right)J^2\right] \\
&= \frac{1}{2^p}\left[I_3 + pJ + \left(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} - \binom{p}{0} - \binom{p}{1}\right)J^2\right] \\
&= \frac{1}{2^p}\left[I_3 + pJ + \left(2^p - p - 1\right)J^2\right] \\
&= \frac{1}{2^p}I_3 + \frac{p}{2^p}J + \left(1 - \frac{p+1}{2^p}\right)J^2.
\end{aligned}$$

On vient d'établir le résultat demandé pour tout $p \geqslant 2$, et on vérifie qu'il reste encore valable pour $p = 0$ et $p = 1$. Pour $p = 0$, $\frac{1}{2^p}I_3 + \frac{p}{2^p}J + \left(1 - \frac{p+1}{2^p}\right)J^2 = I_3 + 0 + (1-1)J^2 = I_3 = A^0$ OK. Si $p = 1$, $\frac{1}{2^p}I_3 + \frac{p}{2^p}J + \left(1 - \frac{p+1}{2^p}\right)J^2 = \frac{1}{2}I_3 + \frac{1}{2}J + \left(1 - \frac{2}{2}\right)J^2 = A = A^1$ OK. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\forall p \in \mathbb{N}, \qquad A^p &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^p} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^p} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{p}{2^p} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{2^p} \\ 0 & 0 & \frac{p}{2^p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 - \frac{p+1}{2^p} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{p+1}{2^p} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{p+1}{2^p} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^p} & \frac{p}{2^p} & 1 - \frac{p+1}{2^p} \\ 0 & \frac{1}{2^p} & 1 - \frac{1}{2^p} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = \frac{1}{2^p}I_3 + \frac{p}{2^p}J + \left(1 - \frac{p+1}{2^p}\right)J^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^p} & \frac{p}{2^p} & 1 - \frac{p+1}{2^p} \\ 0 & \frac{1}{2^p} & 1 - \frac{1}{2^p} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

8. Calculons. On a

$$\frac{1}{2^p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{p}{2^p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(croissances comparées)}$$

et aussi :

$$\frac{p+1}{2^p} = 2 \times \frac{p+1}{2^{p+1}} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(croissances comparées)}$$

On en déduit alors que $\lim\limits_{p\to+\infty} A^p = J^2$. De plus, J^2 n'a que des coefficients positifs ou nul et la somme de chaque ligne fait bien 1. Conclusion,

$$\boxed{(A^p)_{p\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } A_\infty = J^2 \text{ qui est stochastique.}}$$

9. Par la question 4. on sait que $\forall p \in \mathbb{N}$, $X_p = (A^p)^T X_0$. Or $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$. Donc $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ainsi, par la question 7. pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$X_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^p} & \frac{p}{2^p} & 1 - \frac{p+1}{2^p} \\ 0 & \frac{1}{2^p} & 1 - \frac{1}{2^p} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^p} & 0 & 0 \\ \frac{p}{2^p} & \frac{1}{2^p} & 0 \\ 1 - \frac{p+1}{2^p} & 1 - \frac{1}{2^p} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^p} \\ \frac{p}{2^p} \\ 1 - \frac{p+1}{2^p} \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_p = \frac{1}{2^p} \ \textit{(déjà vu)} \\ b_p = \frac{p}{2^p} \\ c_p = 1 - \frac{p+1}{2^p}. \end{cases}}$$

Par croissance comparée, $\frac{p}{2^p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{p+1}{2^p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} a_p = \lim_{p\to+\infty} b_p = 0 \text{ et } \lim_{p\to+\infty} c_p = 1.}$$

La probabilité, lorsque l'on pioche un individu au hasard, d'obtenir un papillon tend vers 1. Autrement dit $\boxed{\text{asymptotiquement, la population sera exclusivement composée de papillon}}$ (et il n'y aura plus ni chenille, ni chrysalide). La réponse était donc dans le titre de la partie, « nous serons tous papillon un jour », excellente moralité.

Partie 3 : Les matrices aussi savent muer

Posons $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

10. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $U = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} BX = \lambda X \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y + 2z \\ -2x + 3y + 3z \\ z \end{pmatrix} = 2\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y + 2z \\ -2x + 3y + 3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda x \\ 2\lambda y \\ 2\lambda z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une matrice/vecteur,

$$\mathcal{S}_\lambda : \quad \begin{cases} y + 2z = 2\lambda x \\ -2x + 3y + 3z = 2\lambda y \\ z = 2\lambda z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2\lambda x + y + 2z = 0 \\ -2x + (3 - 2\lambda) y + 3z = 0 \\ (1 - 2\lambda) z = 0. \end{cases}$$

Premier cas, si $1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1/2$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\lambda : \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ -2x + 2y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ z = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\boxed{E_{1/2} = \left\{ (x, x, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 0)\right).}$$

Vérification : pour $X = (1,1,0)$, on a

$$BX = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda X, \qquad \textit{avec } \lambda = \frac{1}{2}.$$

Deuxième cas, si $\lambda \neq 1/2$. Alors, $1 - 2\lambda \neq 0$ et donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_\lambda : \quad \begin{cases} -2\lambda x + y + 2z = 0 \\ -2x + (3-2\lambda) y + 3z = 0 \\ (1-2\lambda) z = 0 \end{cases} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2\lambda x + y + 2z = 0 \\ -2x + (3-2\lambda) y + 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2\lambda x + y = 0 \\ -2x + (3-2\lambda) y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x + (3-2\lambda) y = 0 \\ -2\lambda x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftrightarrow L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x + (3-2\lambda) y = 0 \\ \left(1 - 3\lambda + 2\lambda^2\right) y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad L_2 \to L_2 - \lambda L_1.
\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de $2\lambda^2 - 3\lambda + 1$, $\Delta = 9 - 8 = 1$, donc les racines sont $\frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$, ce qui est exclu car $\lambda \neq 1/2$, et $\frac{3+1}{4} = 1$.

Premier sous-cas, $\lambda = 1$. Alors,

$$\mathcal{S}_1 : \quad \begin{cases} -2x + (3-2\lambda) y = 0 \\ \left(1 - 3\lambda + 2\lambda^2\right) y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x + y = 0 \\ 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 2x \\ z = 0. \end{cases}$$

Dans ce cas,

$$\boxed{E_1 = \left\{ (x, 2x, 0) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left((1,2,0)\right).}$$

Vérification : pour $X = (1,2,0)$, on a

$$BX = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda X, \qquad \textit{avec } \lambda = 1.$$

Deuxième sous-cas, $\lambda \neq 1$ et toujours $\lambda \neq 1/2$,

$$\mathcal{S}_\lambda : \quad \begin{cases} -2x + (3-2\lambda) y = 0 \\ \left(1 - 3\lambda + 2\lambda^2\right) y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x + (3-2\lambda) y = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = y = z = 0.$$

Dans ce cas,

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1/2; 1\}, \qquad E_\lambda = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.}$$

11. Par la question précédente (ou même simplement les vérifications précédentes, qui peuvent se faire même si l'on n'a pas trouvé les E_λ, on a bien

$$\boxed{u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in E_{1/2} \qquad \text{et} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \in E_1.}$$

12. Allez hop, un petit pivot.

$$
\begin{array}{lll}
P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & & I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow -L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + 2L_3 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Puisque $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, on en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$ et de plus,

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Vérification,

$$P^{-1}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = I_3 \ \ OK\,!$$

13. On a les égalités entre matrices suivantes :

$$
\begin{aligned}
P^{-1}BP &= P^{-1}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A.
\end{aligned}
$$

Conclusion,

$$\boxed{P^{-1}BP = A.}$$

14. En multipliant par P à gauche et P^{-1} à droite, on a

$$PAP^{-1} = PP^{-1}BPP^{-1} = B.$$

Puis, on montre par récurrence que

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \qquad B^p = PA^pP^{-1}.}$$

15. Soit $p \in \mathbb{N}$. Par la question précédente et la question 7., on obtient

$$\begin{aligned}
B^p = PA^pP^{-1} &= P\begin{pmatrix} \frac{1}{2^p} & \frac{p}{2^p} & 1-\frac{p+1}{2^p} \\ 0 & \frac{1}{2^p} & 1-\frac{1}{2^p} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= P\begin{pmatrix} \frac{1-p}{2^p}-1+\frac{p+1}{2^p} & 1-\frac{1}{2^p} & \frac{-1+2p}{2^p}+1-\frac{p+1}{2^p} \\ -\frac{1}{2^p}-1+\frac{1}{2^p} & 1 & \frac{2}{2^p}+1-\frac{1}{2^p} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1+\frac{2}{2^p} & 1-\frac{1}{2^p} & 1+\frac{p-2}{2^p} \\ -1 & 1 & 1+\frac{1}{2^p} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1+\frac{2}{2^p} & 1-\frac{1}{2^p} & 1+\frac{p-1}{2^p} \\ -2+\frac{2}{2^p} & 2-\frac{1}{2^p} & 2+\frac{p-2}{2^p} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^p} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \qquad B^p = \begin{pmatrix} -1+\frac{2}{2^p} & 1-\frac{1}{2^p} & 1+\frac{p-1}{2^p} \\ -2+\frac{2}{2^p} & 2-\frac{1}{2^p} & 2+\frac{p-2}{2^p} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^p} \end{pmatrix}.}$$

Vérification, pour $p = 0$, $\begin{pmatrix} -1+\frac{2}{2^p} & 1-\frac{1}{2^p} & 1+\frac{p-1}{2^p} \\ -2+\frac{2}{2^p} & 2-\frac{1}{2^p} & 2+\frac{p-2}{2^p} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^p} \end{pmatrix} = I_3$ *OK ! Si* $p = 1$,

$$\begin{pmatrix} -1+\frac{2}{2^p} & 1-\frac{1}{2^p} & 1+\frac{p-1}{2^p} \\ -2+\frac{2}{2^p} & 2-\frac{1}{2^p} & 2+\frac{p-2}{2^p} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ -1 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = B \text{ OK !}$$

Partie 4 : Des polynômes pas pusillanimes, plutôt parfaits pour papillon

Soit $P = X^3 - 2X^2 + \frac{5}{4}X - \frac{1}{4}$. On fixe $p \in \mathbb{N}$.

16. On a

$$\boxed{P' = 3X^2 - 4X + \frac{5}{4}.}$$

Donc

$$P'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - 2 + \frac{5}{4} = 0.$$

Conclusion, $\boxed{P'\left(\frac{1}{2}\right) = 0}$.

17. On pourrait se servir de la question 7. mais comme on souhaite dans cette partie redémontrer cette formule, on calcule directement :

$$A^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Puis,

$$A^3 = A^2A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Par suite, on a les égalités matricielles suivantes :

$$\begin{aligned}
P(A) &= A^3 - 2A^2 + \frac{5}{4}A - \frac{1}{4}I_3 \\
&= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \frac{5}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{8}\left[\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right] \\
&= O_3.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{P(A) = O_3.}$$

18. Par la question précédente, on a

$$A^3 - 2A^2 + \frac{5}{4}A - \frac{1}{4}I_3 = O_3 \Leftrightarrow A\left(A^2 - 2A + \frac{5}{4}I_3\right) = \frac{1}{4}I_3 \Leftrightarrow A\left(4A^2 - 8A + 5I_3\right) = I_3.$$

Donc A est inversible et

$$A^{-1} = 4A^2 - 8A + 5I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion, $\boxed{A \text{ est inversible}}$ et

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Vérification : $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I_3$ *OK !*

19. On admet qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tels que $X^p = PQ + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$. On admet alors que l'on a également $pX^{p-1} = P'Q + PQ' + 2\alpha X + \beta$. On observe que

$$P(1) = 1 - 2 + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = -1 + 1 = 0.$$

Donc 1 est une racine de P donc

$$P = X^3 - 2X^2 + \frac{5}{4}X - \frac{1}{4} = (X-1)\left(X^2 - X + \frac{1}{4}\right) = (X-1)\left(X - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Donc 1 et 1/2 sont racines de P. Dès lors,

$$1^p = \underbrace{P(1)}_{=0} Q(1) + \alpha + \beta + \gamma \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

De même,

$$\frac{1}{2^p} = \underbrace{P\left(\frac{1}{2}\right)}_{=0} Q\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} + \gamma \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha + 2\beta + 4\gamma = \frac{1}{2^{p-2}}.$$

Enfin, on a également vu que $P'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. D'où, par la seconde relation donnée par l'énoncé,

$$\frac{p}{2^{p-1}} = \underbrace{P'\left(\frac{1}{2}\right)}_{=0} Q\left(\frac{1}{2}\right) + \underbrace{P\left(\frac{1}{2}\right)}_{=0} Q'\left(\frac{1}{2}\right) + \alpha + \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha + \beta = \frac{p}{2^{p-1}}.$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{p}{2^{p-1}} \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = \frac{1}{2^{p-2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{p}{2^{p-1}} \\ \gamma = 1 - \frac{p}{2^{p-1}} \\ \beta + 4\gamma = \frac{2-p}{2^{p-1}} \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{p}{2^{p-1}} \\ \beta + 4\gamma = \frac{2-p}{2^{p-1}} \\ \gamma = 1 - \frac{p}{2^{p-1}} \end{cases} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{p}{2^{p-1}} - \beta = \frac{p}{2^{p-1}} - \frac{2+3p}{2^{p-1}} + 4 = 4 - \frac{2+2p}{2^{p-1}} = 4 - \frac{p+1}{2^{p-2}} \\ \beta = \frac{2-p}{2^{p-1}} - 4\gamma = \frac{2-p}{2^{p-1}} - 4 + \frac{4p}{2^{p-1}} = \frac{2+3p}{2^{p-1}} - 4 \\ \gamma = 1 - \frac{p}{2^{p-1}} \end{cases}$$

Conclusion, on obtient bien,

$$\boxed{\alpha = 4 - \frac{p+1}{2^{p-2}}, \quad \beta = \frac{2+3p}{2^{p-1}} - 4, \quad \gamma = 1 - \frac{p}{2^{p-1}}.}$$

20. Soit $p \in \mathbb{N}$. On sait que $X^p = PQ + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$. Donc en évaluant en A,

$A^p = P(A)Q(A) + \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3 = O_3 Q(A) + \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3 = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$ par la question 17.

Donc par la question précédente et le calcul de A^2 mené en question 17.

$$\begin{aligned} A^p &= \left(4 - \frac{p+1}{2^{p-2}}\right)\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \left(\frac{2+3p}{2^{p-1}} - 4\right)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \left(1 - \frac{p}{2^{p-1}}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(1 - \frac{p+1}{2^p}\right)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \left(\frac{2+3p}{2^p} - 2\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \left(1 - \frac{2p}{2^p}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^p} & \frac{p}{2^p} & 1 - \frac{p+1}{2^p} \\ 0 & \frac{1}{2^p} & 1 - \frac{1}{2^p} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On retrouve exactement la formule établie à la question 7. :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \qquad A^p = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^p} & \frac{p}{2^p} & 1 - \frac{p+1}{2^p} \\ 0 & \frac{1}{2^p} & 1 - \frac{1}{2^p} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Partie 5 : Si un battement d'aile de papillon peut tout changer, le groupe des matrices stochastiques lui reste stoïque par produit.

21. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ deux matrices stochastiques et $C = AB = (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrons que C est stochastique i.e.

$$(i) \qquad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad c_{ij} \geqslant 0$$

$$(ii) \qquad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} c_{ij} = 1.$$

$\boxed{(i)}$ Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On a :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_{ik}}_{\geqslant 0 \text{car } A \text{ stochastique}} \underbrace{b_{kj}}_{\geqslant 0 \text{car } B \text{ stochastique}} \geqslant 0.$$

$\boxed{(ii)}$ Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j} &= \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} b_{\ell j}\right)}_{=1} && \text{car la somme est rectangulaire} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} && \text{car } B \text{ est stochastique} \\
&= 1 && \text{car } A \text{ est stochastique.}
\end{aligned}$$

Donc la matrice $C = AB$ est bien stochastique. Conclusion,

$$\boxed{(A \text{ et } B \text{ stochastique}) \qquad \Rightarrow \qquad AB \text{ stochastique.}}$$

22. Soit A une matrice stochastique. Posons pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(p)$: « A^p est stochastique ».

    Initialisation. Si $p = 0$, alors $A^p = I_n$ qui est bien stochastique. Donc $\mathscr{P}(0)$.

    Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(p) \Rightarrow \mathscr{P}(p+1)$. Supposons $\mathscr{P}(p)$: A^p est stochastique. Donc A et $B = A^p$ sont deux matrices stochastiques. Donc par la question précédente, $AB = AA^p = A^{p+1}$ est stochastique et $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.

    Conclusion, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(p)$ est vraie :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \qquad A^p \text{ est stochastique.}}$$

23. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Montrons que $a_{ij} \leqslant 1$. On a l'inégalité entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
a_{ij} &\leqslant a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} && \textit{car les coefficients de } A \textit{ sont positifs.} \\
&= 1 && \text{car } A \text{ est stochastique.}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![i,j]\!]^2,\ a_{ij} \leqslant 1.}$$

Soit $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

24. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

    (a) On note $X_1 = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, respectivement $AX_1 = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les coefficients de X_1, respectivement de AX_1. Nous avons notamment pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $x_i = 1$. Alors par la formule du produit, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$,

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \underbrace{x_k}_{=1} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1 \qquad \textit{car } A \textit{ est une matrice stochastique.}$$

On en déduit donc que $AX_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = X_1$. Conclusion,

$$\boxed{AX_1 = X_1.}$$

(b) De la question précédente, on obtient que $(I_n - A)\,X_1 = 0_{n,1}$. Supposons $I_n - A$ inversible. Notons B son inverse : $B = (I_n - A)^{-1}$. Alors,

$$(I_n - A)\,X_1 = 0_{n,1} \quad \Rightarrow \quad B\,(I_n - A)\,X_1 = B0_{n,1} \quad \Rightarrow \quad I_nX_1 = 0_{n,1} \quad \Rightarrow \quad X_1 = 0_{n,1},$$

ce qui est faux. Conclusion

$$\boxed{I_n - A \text{ n'est pas inversible.}}$$

25. Montrons que

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \big[\, A \text{ est stochastique} \,\big] \iff \big[\, AX_1 = X_1 \text{ et les coefficients de } A \text{ sont positifs} \,\big]$$

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, par définition des matrices stochastiques, les coefficients de A sont positifs. De plus nous avons vu à la question 24.a que $AX_1 = X_1$. L'implication $\big[\, A \text{ est stochastique} \,\big] \Rightarrow \big[\, AX_1 = X_1 \text{ et les coefficients de } A \text{ sont positifs} \,\big]$ est donc vraie.

Réciproquement, si $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ses coefficients soient positifs et telle que $AX_1 = X_1$ alors pour démontrer que A est stochastique, il nous reste juste à démontrer que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$. Puisque $AX_1 = X_1$, en notant $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les coefficients de X_1, on a par la formule du produit matriciel :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \underbrace{x_k}_{=1} = \underbrace{x_i}_{=1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1.$$

Ainsi la matrice A est bien stochastique et on conclut que

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \big[\, A \text{ est stochastique} \,\big] \iff \big[\, AX_1 = X_1 \text{ et les coefficients de } A \text{ sont positifs} \,\big].}$$

Exercice II - DL et applications

Les trois questions sont indépendantes.

1. Pour tout $x \in]1;+\infty[$,
$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{1+x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}\ln(1+x)}$$
Or
$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)$$
et
$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o\left(x^4\right).$$
Par produit,
$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x}\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} \left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o\left(x^4\right)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{lllll}
x & -\frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{3} & -\frac{x^4}{4} & +o\left(x^4\right)\\
 & -x^2 & +\frac{x^3}{2} & -\frac{x^4}{3} & +o\left(x^4\right)\\
 & & +x^3 & -\frac{x^4}{2} & +o\left(x^4\right)\\
 & & & -x^4 & +o\left(x^4\right)\\
 & & & & +o\left(x^4\right).
\end{array}\\
&\underset{x\to 0}{=} x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$
Posons $u \underset{x\to 0}{=} x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o\left(x^4\right)$. On a
$$u \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
Puis,
   - $u \underset{x\to 0}{=} x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o\left(x^4\right)$,
   - et
$$\begin{aligned}
u^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o\left(x^4\right)\right)\left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o\left(x^4\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{llll}
x^2 & -\frac{3}{2}x^3 & +\frac{11}{6}x^4 & +o\left(x^4\right)\\
 & -\frac{3}{2}x^3 & +\frac{9}{4}x^4 & +o\left(x^4\right)\\
 & & +\frac{11}{6}x^4 & +o\left(x^4\right)\\
 & & & +o\left(x^4\right).
\end{array}\\
&\underset{x\to 0}{=} x^2 - 3x^3 + \frac{44+27}{12}x^4 + o\left(x^4\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x^2 - 3x^3 + \frac{71}{12}x^4 + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$
   - Puis,
$$\begin{aligned}
u^3 &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o\left(x^4\right)\right)\left(x^2 - 3x^3 + \frac{71}{12}x^4 + o\left(x^4\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{lll}
x^3 & -3x^4 & +o\left(x^4\right)\\
 & -\frac{3}{2}x^4 & +o\left(x^4\right)\\
 & & +o\left(x^4\right).
\end{array}\\
&\underset{x\to 0}{=} x^3 - \frac{9}{2}x^4 + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

- Mais aussi,

$$\begin{aligned} u^4 &\underset{x\to 0}{=} \left(x^2-3x^3+\frac{71}{12}x^4+o\left(x^4\right)\right)\left(x^2-3x^3+\frac{71}{12}x^4+o\left(x^4\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^4+o\left(x^4\right). \end{aligned}$$

- Enfin,

$$o\left(u^4\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4\right).$$

Or $\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+\frac{u^4}{24}+o\left(u^4\right)$. Dès lors,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{u(x)} \\ &\underset{x\to 0}{=} 1+x \quad -\tfrac{3}{2}x^2 \quad +\tfrac{11}{6}x^3 \quad -\tfrac{25}{12}x^4 \quad +o\left(x^4\right) \\ &\qquad\qquad +\tfrac{1}{2}x^2 \quad -\tfrac{3}{2}x^3 \quad +\tfrac{71}{24}x^4 \quad +o\left(x^4\right) \\ &\qquad\qquad\qquad +\tfrac{1}{6}x^3 \quad -\tfrac{3}{4}x^4 \quad +o\left(x^4\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad +\tfrac{1}{24}x^4 \quad +o\left(x^4\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +o\left(x^4\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1+x-x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{-50+71-18+1}{24}x^4+o\left(x^4\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1+x-x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{4}{24}x^4+o\left(x^4\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1+x-x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{x^4}{6}+o\left(x^4\right).}$$

2. Posons $t=\frac{1}{x}$, et $g(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)=f(x)=\frac{1}{x}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)-x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=t\operatorname{ch}(t)-\frac{\cos(t)}{t}$. On sait que

$$\operatorname{ch}(t) \underset{t\to 0}{=} 1+o(1).$$

Donc

$$t\operatorname{ch}(t) \underset{t\to 0}{=} t+o(t).$$

D'autre part,

$$\cos(t) \underset{t\to 0}{=} 1-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right).$$

Donc

$$\frac{\cos(t)}{t} \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{t}-\frac{t}{2}+o(t).$$

Alors

$$g(t) \underset{t\to 0}{=} t+o(t)-\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{2}+o(t)\right) \underset{t\to 0}{=} -\frac{1}{t}+\frac{3t}{2}+o(t).$$

Or $x=\frac{1}{t} \underset{t\to 0}{\to} +\infty$. Donc

$$\boxed{f(x)=g\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} -x+\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right).}$$

Ainsi,

$$f(x)+x \underset{x\to+\infty}{=} \frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2x}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)+x = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2x}=0.$$

Par conséquent, on en déduit que

$$\boxed{f \text{ admet une asymptote oblique d'équation } y = -x.}$$

De plus $f(x) + x$ est du signe de $\frac{3}{2x}$ au voisinage de $+\infty$. Ainsi, il existe un voisinage de $+\infty$ tel que dans ce voisinage $f(x) + x$ est strictement positif et par suite

$$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ se trouve asymptotiquement au dessus de son asymptote.}}$$

3. On sait que

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{3x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + (3x) + \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{6} + o\left((3x)^3\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^3}{2} + o\left(x^3\right).\\
\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{e}^{3x} + \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} 1 + 4x + 4x^2 + \frac{29x^3}{6} + o\left(x^3\right).$$

Or

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+u} &\underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}u^2 + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{6}u^3 + o\left(u^3\right)\\
&\underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o\left(u^3\right).
\end{aligned}$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) \underset{x\to 0}{=} 4x + 4x^2 + \frac{29x^3}{6} + o\left(x^3\right)$. Alors

- $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$
- Puis
$$\frac{u(x)}{2} \underset{x\to 0}{=} 2x + 2x^2 + \frac{29x^3}{12} + o\left(x^3\right).$$
- De plus,
$$\begin{aligned}
u^2(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(4x + 4x^2 + \frac{29x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(4x + 4x^2 + \frac{29x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{ccccc} 16x^2 & + & 16x^3 & + & o\left(x^3\right)\\ & + & 16x^3 & + & o\left(x^3\right)\\ & & & + & o\left(x^3\right)\end{array}\\
&\underset{x\to 0}{=} 16x^2 + 32x^3 + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$
Alors
$$-\frac{u^2(x)}{8} \underset{x\to 0}{=} -2x^2 - 4x^3 + o\left(x^3\right).$$
- On a $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} 4x$ donc $u^3(x) \underset{x\to 0}{\sim} 64x^3$. Ainsi
$$u^3(x) \underset{x\to 0}{=} 64x^3 + o\left(x^3\right).$$
D'où
$$\frac{u^3(x)}{16} \underset{x\to 0}{=} 4x^3 + o\left(x^3\right).$$
- Enfin, $o\left(u^3(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$.

Puisque

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{3x} + \ln(1+x)} &\underset{x\to 0}{=} \sqrt{1 + 4x + 4x^2 + \frac{29x^3}{6} + o\left(x^3\right)} \\ &\underset{x\to 0}{=} \sqrt{1 + u(x)} \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{u(x)}{2} - \frac{u^2(x)}{8} + \frac{u^3(x)}{16} + o\left(u^3(x)\right), \end{aligned}$$

on en déduit que

$$\begin{array}{rcccccccc} f(x) & \underset{x\to 0}{=} & 1 + & 2x & + & 2x^2 & + & \frac{29x^3}{12} & + & o\left(x^3\right) \\ & & & & - & 2x^2 & - & 4x^3 & + & o\left(x^3\right) \\ & & & & & & + & 4x^3 & + & o\left(x^3\right) \\ & & & & & & & & + & o\left(x^3\right) \\ & \underset{x\to 0}{=} & 1 + & 2x & & & + & \frac{29x^3}{12} & + & o\left(x^3\right). \end{array}$$

Ainsi

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + \frac{29x^3}{12} + o\left(x^3\right).}$$

Par conséquent, $\boxed{y = 2x + 1 \text{ est l'équation de la tangente } \mathcal{T} \text{ de } f \text{ en } 0}$. De plus,

$$f(x) - 1 - 2x \underset{x\to 0}{=} \frac{29x^3}{12} + o\left(x^3\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) - 1 - 2x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{29x^3}{12}.$$

Or deux équivalents sont de même signe au voisinage du point considéré. Donc $f(x) - 1 - 2x$ est positif pour $x > 0$ au voisinage de 0 et est négatif pour $x < 0$ au voisinage de 0. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de sa tangente au voisinage de } 0^-}$$

et

$$\boxed{\text{est au-dessus de sa tangente au voisinage de } 0^+.}$$

Problème III - Un problème de Cauchy via un développement limité

On considère le problème de Cauchy suivant d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(E) \qquad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + xy'(x) + y(x) = 1 \\ y'(0) = y(0). \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique solution à (E). On note y cette unique solution.

Partie 1 : Même quand on n'y connaît rien, on peut en dire beaucoup.

1. On note que dans l'équation différentielle du deuxième ordre $\forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) + xy'(x) + y(x) = 1$ le coefficient $b : x \mapsto x$ n'est pas constant. On est donc en dehors du cadre du cours qui ne fournit de résultat uniquement lorsque les coefficients d'une équation différentielle du deuxième ordre sont $\boxed{\textbf{constants}}$.

2. Pour tout $n \geqslant 2$. On pose

$$\mathscr{P}(n) \qquad : \qquad \text{« } f \text{ est de classe } \mathscr{C}^n. \text{ »}$$

Démontrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Initialisation. Si $n = 2$. On sait par hypothèse que y est deux fois dérivable. Montrons que y'' est continue. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$y''(x) = -xy'(x) - y(x) + 1.$$

Puisque y est deux fois dérivable, on en déduit que y' et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et donc notamment y' et y est continue donc $x \mapsto -xy'(x) - y(x) + 1$ est continue. Ainsi y'' est continue. Donc y est $\mathscr{C}^2$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie. Par hypothèse de récurrence y est de classe $\mathscr{C}^n$. Donc y' est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$. Ainsi $x \mapsto -xy'(x) - y(x) + 1$ est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$. Donc y'' est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$. Par conséquent, y est de classe $\mathscr{C}^{n-1+2} = \mathscr{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \geqslant 2$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \geqslant 2$, la fonction

$$\boxed{y \text{ est de classe } \mathscr{C}^n.}$$

En particulier y est aussi $\mathscr{C}^1$ ou $\mathscr{C}^0$ (continue). Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, y est $\mathscr{C}^n$ i.e. y est $\mathscr{C}^\infty$.

3. (a) Soit $z : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y(-x) \end{array}$.

   Les fonctions y et $x \mapsto -x$ sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par composition, z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z'(x) = -y'(-x) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad z''(x) = y''(-x).$$

   Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z''(x) + xz'(x) + z(x) = y''(-x) - xy'(-x) + y(-x).$$

   Posons $t = -x$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z''(x) + xz'(x) + z(x) = y''(t) + ty(t) + y(t) = 1 \qquad \text{car } y \text{ solution de } (E).$$

   De plus $z(0) = y(-0) = y(0) = 0$ et $z'(0) = -y'(-0) = 0$. Conclusion,

$$\boxed{z \text{ est bien une solution de } (E).}$$

   (b) On a vu que z était une solution de (E). Or l'énoncé nous assure que (E) admet une unique solution. Donc par unicité, nécessairement $z = y$ i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = z(x) = y(-x).$$

   De plus y est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0. Conclusion,

$$\boxed{y \text{ est une fonction paire.}}$$

Partie 2 : Une initiation à un raisonnement de série entière, un an avant l'heure !

On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

4. On a vu précédemment que y est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier pour $k = 2n$, y est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, intervalle contenant 0. Donc d'après le cours, on en déduit que y admet un développement limité d'ordre $2n$ en 0 :

$$\exists (a_0, \ldots, a_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n+1}, \qquad \boxed{y(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k + o\left(x^{2n}\right).}$$

   Or on a également vu que y est paire donc

$$\boxed{\forall k \in [\![0; n-1]\!],\ a_{2k+1} = 0.}$$

5. On rappelle que par la formule de Taylor, puisque y est de classe $\mathscr{C}^{2n}$, on a pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$,

$$a_{2k} = \frac{y^{(k)}(0)}{k!}.$$

En particulier $a_0 = y(0)$ et $a_2 = \frac{y''(0)}{2}$. Or puisque y est solution de (E), $a_0 = y(0) = 0$. De plus $y'(0) = 0$ et en prenant $x = 0$ dans $y''(x) + xy'(x) + y(x) = 1$, on obtient

$$y''(0) + 0 + y(0) = y''(0) = 1.$$

Donc $a_2 = \frac{y''(0)}{2} = \frac{1}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{a_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_2 = \frac{1}{2}.}$$

6. Puisque y est $\mathscr{C}^{2n}$, alors y' est de classe $\mathscr{C}^{2n-1}$ et y'' est de classe $\mathscr{C}^{2n-2}$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi y' admet un développement limité à l'ordre $2n-1$ en 0 et y'' a l'ordre $2n-2$ en 0, notons-le

$$y''(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n-2} b_k x^k + o\left(x^{2n-2}\right).$$

Alors par primitivation du développement limité, car y'' est continue au voisinage de 0 (car $\mathscr{C}^{2n-2}$),

$$y'(x) \underset{x\to 0}{=} y'(0) + \sum_{k=0}^{2n-2} b_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{2n-1}\right).$$

A nouveau, par primitivation du développement limité, car y' est continue au voisinage de 0,

$$y(x) \underset{x\to 0}{=} y(0) + y'(0)x + \sum_{k=0}^{2n-2} b_k \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)} + o\left(x^{2n}\right).$$

Posons $\tilde{k} = k+2$. Si $k = 0$, $\tilde{k} = 2$ et si $k = 2n-2$, $\tilde{k} = 2n$. Ainsi,

$$y(x) \underset{x\to 0}{=} y(0) + y'(0)x + \sum_{k=2}^{2n} b_{k-2} \frac{x^k}{(k-1)\,k} + o\left(x^{2n}\right)$$

Or $y(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k + o\left(x^{2n}\right)$. Donc par unicité du développement limité,

$$\forall k \in [\![2;2n]\!], \qquad \frac{b_{k-2}}{(k-1)\,k} = a_k \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall k \in [\![0;2n-2]\!], \qquad b_k = (k+1)(k+2)\,a_{k+2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{y''(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n-2} (k+1)(k+2)\,a_{k+2} x^k + o\left(x^{2n-2}\right).}$$

Et comme $y'(0) = 0$,

$$\begin{aligned} y'(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n-2} (k+1)(k+2)\,a_{k+2} \frac{x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{2n-1}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n-2} (k+2)\,a_{k+2} x^{k+1} + o\left(x^{2n-1}\right). \end{aligned}$$

Posons $\tilde{k} = k+1$. Si $k=0$, $\tilde{k}=1$ et si $k=2n-2$, $\tilde{k}=2n-1$. D'où

$$y'(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{\tilde{k}=1}^{2n-1} \left(\tilde{k}+1\right) a_{\tilde{k}+1} x^{\tilde{k}} + o\left(x^{2n-1}\right).$$

La variable de sommation étant muette,on conclut que

$$\boxed{y'(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{2n-1} (k+1)\, a_{k+1} x^{k} + o\left(x^{2n-1}\right).}$$

7. D'après l'équation différentielle, on a

$$1 \underset{x\to 0}{=} y''(x) + xy'(x) + y(x).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
1 &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n-2} (k+1)(k+2)\, a_{k+2} x^k + o\left(x^{2n-2}\right) + x\left(\sum_{k=1}^{2n-1} (k+1)\, a_{k+1} x^k + o\left(x^{2n-1}\right)\right) \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k + o\left(x^{2n}\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n-2} (k+1)(k+2)\, a_{k+2} x^k + o\left(x^{2n-2}\right) + \sum_{k=1}^{2n-1} (k+1)\, a_{k+1} x^{k+1} + o\left(x^{2n}\right) \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{2n-2} a_k x^k + o\left(x^{2n-2}\right).
\end{aligned}$$

Effectuons le glissement d'indice $\tilde{k} = k+1$ dans la somme du milieu :

$$\begin{aligned}
1 &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n-2} (k+1)(k+2)\, a_{k+2} x^k + o\left(x^{2n-2}\right) + \sum_{k=2}^{2n} k a_k x^k + o\left(x^{2n}\right) + \sum_{k=0}^{2n-2} a_k x^k + o\left(x^{2n-2}\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 2\underbrace{a_2}_{=1/2} + 6\underbrace{a_3}_{=0} x + \sum_{k=2}^{2n-2} (k+1)(k+2)\, a_{k+2} x^k + \sum_{k=2}^{2n-2} k a_k x^k + o\left(x^{2n-2}\right) \\
&\qquad + \underbrace{a_0}_{=0} + \underbrace{a_1}_{=0} x + \sum_{k=0}^{2n-2} a_k x^k + o\left(x^{2n-2}\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=2}^{2n-2} \left[(k+1)(k+2)\, a_{k+2} + k a_k + a_k\right] x^k + o\left(x^{2n-2}\right).
\end{aligned}$$

Donc par unicité du développement limité, on a $1=1$ puis pour tout $k \in [\![2\,;\,2n-2]\!]$

$$(k+1)(k+2)\, a_{k+2} + (k+1)\, a_k = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a_{k+2} = -\frac{a_k}{k+2} \qquad \text{car } k+1 \neq 0,\ k+2 \neq 0.$$

Si $k=2p$ est pair, on sait que $a_{2p} = a_{2p+2} = 0$, on n'obtient rien de neuf. Si $k=2p$, $p \in [\![1; n-1$,

$$a_{2p+2} = -\frac{1}{2p+2} a_{2p}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in [\![1; n-1]\!], \qquad a_{2k+2} = -\frac{1}{2k+2} a_{2k}.}$$

8. Posons pour tout $k \in [\![1\,;\,n-1]\!]$,

$$\mathscr{P}(k) \qquad : \qquad \text{« } a_{2k} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^k k!} \text{ ».}$$

Démontrons $\mathscr{P}(k)$ par récurrence.

Initialisation. Si $k = 1$ alors, d'après la question 5.,

$$a_{2k} = a_2 = \frac{1}{2} = \frac{(-1)^2}{2^1 1!}.$$

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in [\![1\,;\,n-2]\!]$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie et montrons $\mathscr{P}(k+1)$. On a

$$\begin{aligned} a_{2(k+1)} = a_{2k+2} &= -\frac{1}{2k+2} a_{2k} && \text{d'après la question précédente} \\ &= -\frac{1}{2k+2} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k k!} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(-1)^{k+2}}{2^{k+1}(k+1)!}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est aussi vraie.

Conclusion, pour tout $k \in [\![1\,;\,n-1]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in [\![1\,;\,n-1]\!], \qquad a_{2k} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^k k!}.}$$

Partie 3 : Comment peut-on douter de la beauté des mathématiques ?

9. D'après la question précédente, on en déduit que

$$\begin{aligned} y(x) &\underset{x\to 0}{=} a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} x^{2k} + a_{2n} x^{2n} + o\left(x^{2n}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k k!} x^{2k} + o\left(x^{2n-2}\right) && \text{car } a_0 = 0 \\ &\underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\left(\frac{-x^2}{2}\right)^k}{k!} + o\left(x^{2n-2}\right). \end{aligned}$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \frac{-x^2}{2}$. On a $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$. Et on a alors

$$\begin{aligned} y(x) &\underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{u^k(x)}{k!} + o\left(x^{2n-2}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^k(x)}{k!} + o\left(x^{2n-2}\right) \end{aligned}$$

On reconnait alors le développement limité en 0 de $1 - \mathrm{e}^u$. *Attention ! Rien ne nous dit que le* $o\left(x^{2n-2}\right)$ *est exactement le même que celui de* $1 - \mathrm{e}^{u(x)}$ *!! Il ne doit donc pas disparaitre.* Conclusion,

$$\boxed{y(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \mathrm{e}^{u(x)} + o\left(x^{2n-2}\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + o\left(x^{2n-2}\right).}$$

10. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. La fonction h est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions deux fois dérivables. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h'(x) = x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad h''(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + x\,(-x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \left(1 - x^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h''(x) + xh'(x) + h(x) = \left(1 - x^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 1.$$

Enfin,

$$h(0) = 1 - \mathrm{e}^0 = 0 \qquad \text{et} \qquad h'(0) = 0\,\mathrm{e}^0 = 0.$$

Conclusion, $\boxed{\text{la fonction } h = y : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \text{ est bien l'unique solution de } (E).}$