Devoir Maison 6
Ensemble-application, DL, continuité-dérivabilité

A faire pour le jeudi 08 février

Problème I - Continuité-dérivabilité et analyse asymptotique

On considère la fonction f définie par l'expression suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Dans tout le sujet, la notation $DL_p(a)$, où $p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, signifie développement limité à l'ordre p en a.

Partie 1 : Un DL et la vie est plus belle.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer le $DL_{2n}(0)$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
2. Retrouver alors le $DL_{2n+1}(0)$ de la fonction $x \mapsto \arctan x$.

Partie 2 : Le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, c'est bien.

3. Montrer que la fonction f est continue en 0.
4. Etudier la parité de la fonction f, puis en déduire une restriction de son ensemble d'étude.
5. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
6. Montrer par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ que f est $\mathscr{C}^1$ en 0 et préciser $f'(0)$.
7. En utilisant la définition de la dérivabilité, montrer que f est dérivable en 0 et retrouver $f'(0)$.
8. A l'aide d'un théorème du cours *(demandez au patron si vous séchez)*, montrer que

$$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad \frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x. \qquad (\bigstar)$$

Partie 3 : Au pays des lilliputiens

9. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}$$

   où $\varepsilon(x)$ désigne le signe de x.

10. En déduire un $DL_6(0)$ de la fonction $x \mapsto f(x) - \varepsilon(x)\dfrac{\pi}{2}x^2$, puis un équivalent de f en 0.
11. En déduire l'équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au point d'abscisse 0, puis étudier leur position relative au voisinage de 0.

Partie 4 : Au pays des géants

12. Déterminer un développement asymptotique de la fonction f en $+\infty$ à la précision $\underset{+\infty}{o}(\frac{1}{x^4})$.

13. En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ (dont on précisera l'équation), puis leur position relative au voisinage de $+\infty$.

14. Sans aucun calcul, préciser le comportement asymptotique (présence ou non d'une asymptote, position relative) de la fonction f au voisinage de $-\infty$.

15. Déduire de ($\bigstar$) la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x$ sur $\mathbb{R}$.

Partie 5 : Ayons une vision globale

16. Déterminer les valeurs de $f(1)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{3})$ et $f(-\frac{1}{\sqrt{3}})$.

17. A l'aide de ($\bigstar$), déterminer le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

18. Tracer avec soin le graphe de la fonction f.

    (On fera apparaitre asymptotes, tangentes déterminées précédemment entre autres).

19. Justifier avec soin que la fonction f est bijective, puis tracer sur le même graphe la courbe représentative $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ de la bijection réciproque de la fonction f.

Partie 6 : De l'autre côté du miroir

On admet qu'il existe des coefficients réels a_0, a_1, b_1, b_2 tels que :

$$f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{=} a_1 x + a_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

20. Déterminer un développement asymptotique en $+\infty$ de la fonction $\frac{1}{f}$ à la précision $\underset{+\infty}{o}(\frac{1}{x^2})$.

21. Sachant que $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en utilisant la question précédente, déterminer les coefficients a_1, a_0, b_1 et b_2 recherchés.

22. Les coefficients trouvés sont-ils compatibles avec le tracé de $\mathscr{C}_{f^{-1}}$?

23. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? *Justifier avec soin.*

$$(i)\ f^{-1}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{b_1}{x} \qquad (ii)\ f^{-1}(x) \underset{+\infty}{\sim} a_1 x \qquad (iii)\ f^{-1}(x) \underset{+\infty}{\sim} a_1 x - \frac{50b_1^2}{x}$$

Partie 7 : Quand g s'invite à la fête

On considère la fonction g définie sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ par l'expression :

$$g(x) = x\left(\frac{f(x)}{x}\right)^x$$

24. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ de la fonction g.

25. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 3 de la fonction arctan, déterminer l'équation de l'asymptote à la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g en $+\infty$.

Partie 8 : Voilà, 'y a toujours un moment où le prof part en freestyle...

On considère l'équation (E) suivante d'inconnue $x \in]0, +\infty[$:

$$(E) \qquad 4xf\left(\frac{1}{2x}\right) + 9xf\left(\frac{1}{3x}\right) = \frac{\pi}{4x}.$$

26. Expliciter l'équation (E) à résoudre.
27. Résoudre (E) en justifiant avec soin.

Problème II - Ensembles et applications

Soient E un ensemble et $f : E \to E$ une application. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f^n la composée n fois de f : $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$. On pose également par convention $f^0 = \mathrm{Id}_E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit alors

$$E_n = \mathrm{Im}\left(f^n\right) = f^n\left(E\right).$$

1. Préciser E_0.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_{n+1} \subseteq E_n$ i.e. la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion. On admet alors (récurrence immédiate) que pour tout $i \leqslant j$, $E_j \subseteq E_i$.
3. On suppose dans cette question que f est injective.
   (a) Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathscr{P}(E)$, on a $f(A) = f(B) \Rightarrow A = B$.
   (b) Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $E_p = E_{p+1}$ alors f est bijective.
4. Si f est surjective, que dire de la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. On suppose que $E = \mathbb{N}$ et $f : n \mapsto n + 1$. Préciser dans ce cas la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant p + 1$. On suppose dans cette question que $E_k = E_p$.
   (a) Démontrer que $\forall i \in [\![p\,;\,k]\!]$, $E_i = E_p$.
   (b) Soit $y \in E_p$. Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f^k(x)$.
   (c) On pose $z = f^{k-1}(x)$. Montrer que $z \in E_k$.
   (d) En déduire que $y \in E_{k+1}$.
   (e) Justifier que $E_p = E_{k+1}$.
7. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence que si $E_p = E_{p+1}$ alors $\forall k \geqslant p$, $E_k = E_p$.