Correction du Devoir Maison 6
Continuité-dérivabilité, DL, ensembles et applications

Du jeudi 08 février

Problème I - Continuité-dérivabilité et analyse asymptotique

On considère la fonction f définie par l'expression suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Dans tout le sujet, la notation $DL_p(a)$, où $p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, signifie développement limité à l'ordre p en a.

Partie 1 : Préliminaires

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. On a les égalités suivantes :

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).}$$

2. Par le théorème de primitivation du développement limité, on en déduit de la question précédente que

$$\arctan x \underset{x\to 0}{=} \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Or $\arctan(0) = 0$, ce qui permet d'en déduire que

$$\boxed{\arctan x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).}$$

Partie 2 : Régularité de f

3. Montrons que la fonction f est continue en 0 i.e. $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ i.e. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Sachant que $\arctan(\frac{1}{x}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $x^2 \geqslant 0$, on a l'encadrement suivant :

$$\underbrace{-\frac{\pi}{2}x^2}_{\underset{x\to 0}{\to} 0} \leqslant f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \underbrace{\frac{\pi}{2}x^2}_{\underset{x\to 0}{\to} 0}$$

On a $\lim_{x\to 0} -\frac{\pi}{2}x^2 = \lim_{x\to 0} \frac{\pi}{2}x^2 = 0$. Donc par le théorème d'encadrement, il vient que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$$

4. Montrons que f est impaire i.e. $\begin{cases} \forall x \in \mathscr{D}_f,\ -x \in \mathscr{D}_f & (i) \quad \checkmark \\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x) & (ii) \end{cases}$.

$\boxed{(ii)}$ Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Sachant que la fonction arctan est impaire, on a les égalités entre réels suivantes :

$$f(-x) = (-x)^2 \arctan\left(\frac{1}{-x}\right) = -f(x)$$

De plus $f(0) = 0$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(-x) = f(x).$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est impaire}}$, et sa courbe représentative est alors symétrique par rapport à l'origine.

$$\boxed{\text{On peut alors restreindre son étude à l'ensemble } \mathbb{R}_*^+ \text{ par exemple.}}$$

5. Montrons que la fonction f est dérivable en 0 i.e. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe et est finie.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Sachant que $\arctan(\frac{1}{x}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$, on a l'encadrement suivant :

$$\underbrace{-\frac{\pi}{2}|x|}_{\substack{\to 0 \\ x\to 0}} \leqslant \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \underbrace{\frac{\pi}{2}|x|}_{\substack{\to 0 \\ x\to 0}}$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0.}$

$\boxed{(ii)}$ Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Sachant que la fonction arctan est impaire, on a les égalités entre réels suivantes :

$$f(-x) = (-x)^2 \arctan\left(\frac{1}{-x}\right) = -f(x)$$

De plus $f(0) = 0$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est impaire}}$, et sa courbe représentative est alors symétrique par rapport à l'origine.
$\boxed{\text{On peut alors restreindre son étude à l'ensemble } \mathbb{R}_*^+ \text{ par exemple.}}$

6. La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc par composée, la fonction $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[}$ et :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right) = 2x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}$$

Conclusion

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}.}$$

7. On observe les points suivants :

(i) La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions qui le sont.
(ii) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (notamment en 0 grâce à la question 3.)
(iii) De même que dans la question 3., on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad 0 \leqslant \left|2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant 2\,|x|\,\frac{\pi}{2} = \pi x.$$

Or $\lim_{x\to 0} \pi x = 0$. Donc par le théorème d'encadrement, on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left|2x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} 2x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

D'autre part, $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1+x^2} = 0$. Donc par différence, on en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) \text{ existe et vaut } 0.$$

On en conclut que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ en } 0 \text{ et } f'(0) = 0.}$$

8. Pour montrer que f est dérivable en 0 par la définition de la dérivabilité, on doit montrer que $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ admet une limite quand $x \to 0$. Calculons,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$0 \leqslant \left|x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|.$$

Or $\lim_{x\to 0} |x| = 0$. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left|x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Ainsi, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe et vaut 0. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0.}$$

Ce résultat est parfaitement cohérent avec la question précédente où l'on a établi que f est $\mathscr{C}^1$ et donc dérivable en 0 et on avait bien trouvé $f'(0) = 0$.

9. Soit $x \in]0;+\infty[$. On observe les points suivants :

   (i) la fonction arctan est continue sur $[0;x]$,

   (ii) la fonction arctan est dérivable sur $]0;x[$ car $x > 0$.

Donc par l'identité des accroissements finis *(bien sûr !)* il existe $c_x \in]0;x[$ tel que

$$\frac{\arctan(x)-\arctan(0)}{x-0} = \arctan'(c_x) = \frac{1}{1+c_x^2}.$$

Ainsi,

$$\arctan(x) = \frac{x}{1+c_x^2}.$$

Or $0 < c_x < x$ donc par la stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, $0 < c_x^2 < x^2$. D'où par la stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c_x^2} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c_x^2} < x \qquad \text{car } x > 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[\,, \qquad \frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x.}$$

Partie 3 : Etude locale en 0

10. Montrons que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \underbrace{\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}_{h(x)} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \quad (i) \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^* \quad (ii) \end{cases}$$

$\boxed{(i)}$ La fonction h ainsi définie est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et :

$$\forall x > 0, \quad h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Sachant qu'une fonction nulle sur un **intervalle** y est constante, on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x > 0, \quad h(x) = \lambda$$

C'est en particulier vrai pour $x = 1 > 0$, ce qui permet de trouver :

$$h(1) = \lambda \iff \arctan(1) + \arctan(1) = \lambda \iff \lambda = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, on a bien montré que pour tout $x > 0$, $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{(ii)}$ On remarque que la fonction h introduite est impaire, ce qui permet d'en déduire :

$$\forall x < 0, \quad h(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}.}$$

11. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) - \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 &= x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 = x^2\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -x^2 \arctan x \qquad \text{par la question précédente.} \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} f(x) = \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 - x^2 \arctan x &\underset{x\to 0}{=} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 - x^2\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 - x^3 + \frac{x^5}{3} + o(x^6). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 - x^3 + \frac{x^5}{3} + o(x^6).}$$

Par troncature à l'ordre 2,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 + o(x^2).$$

Autrement dit,

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2.}$$

12. D'après la question précédente :

$$f(x) - [ax+b] \underset{x\to 0}{\sim} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 \qquad \text{avec } a = b = 0$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'équation de la tangente } \mathcal{T}_0 \text{ est } y = 0.}$
Sachant que l'équivalent est strictement positif si et seulement si $x > 0$, on en déduit qu'au voisinage de 0, $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{T}_0$ à gauche de 0 et lui est au-dessus à droite de 0.

Partie 4 : Etude locale au voisinage de $+\infty$

13. Puisque $u = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & \underset{x\to+\infty}{=} x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right) \\ & \underset{x\to+\infty}{=} x - \frac{1}{3x} + \frac{1}{5x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x - \frac{1}{3x} + \frac{1}{5x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).}$$

14. D'après la question précédente :

$$f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{3x} < 0 \quad (\text{au voisinage de } +\infty)$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ admet une asymptote oblique en } +\infty \text{ d'équation } y = x}$. Sachant que $-\dfrac{1}{3x} < 0$ au voisinage de $+\infty$, $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de son asymptote au voisinage de } +\infty.}$

15. La fonction f étant impaire, $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.
Ainsi, $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ admet une asymptote oblique en } -\infty \text{ d'équation } y = x}$,
et $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de son asymptote au voisinage de } -\infty.}$

16. D'après ($\bigstar$), on a

$$\forall y \in]0,+\infty[,\ \arctan(y) < y.$$

Soit $x \in]0,+\infty[$. Alors l'inégalité ($\bigstar$) étant vraie pour tout $y \in]0,+\infty[$, elle est en particulier vraie pour $y = \frac{1}{x} \underset{\text{ok !}}{>} 0$, ce qui permet d'en déduire que :

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \underset{x^2>0}{\iff} x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < x \iff f(x) < x$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est strictement en-dessous de son asymptote sur } \mathbb{R}_*^+}$, et par imparité $\boxed{\text{est strictement au-dessus sur } \mathbb{R}_*^-}$ et les deux courbes s'intersectent au point d'abscisse $x = 0$.

Partie 5 : Etude des variations et de la bijection réciproque

17. Après calculs, $\boxed{f(1) = \frac{\pi}{4},\ f(-1) \underset{\text{imparité}}{=} -f(1) = -\frac{\pi}{4},\ f(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} \text{ et } f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{9}.}$

18. Soit $y \in]0;+\infty[$. On sait par ($\bigstar$) que $\frac{y}{1+y^2} < \arctan(y)$. De plus $\arctan(y) > 0$. Donc

$$\forall y \in]0,+\infty[, \quad \frac{y}{1+y^2} < \arctan(y).$$

Etudions maintenant le signe de la dérivée de f.

Soit $x \in]0,+\infty[$. L'inégalité précédente étant vraie pour tout $y \in]0,+\infty[$, elle est en particulier vraie pour $y = \frac{1}{x} \underset{\text{ok !}}{\in}]0,+\infty[$, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} < 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \iff \frac{x}{1+x^2} < 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x>0}{\iff} \frac{x^2}{1+x^2} < 2x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi, pour tout $x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) > 0$.

Remarque : f' est paire, donc on pourrait même conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}^*, \ f'(x) > 0$.

On en déduit les tableaux de signes et variations suivants :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$

Concernant les limites, rappelons que d'après la question 13. :

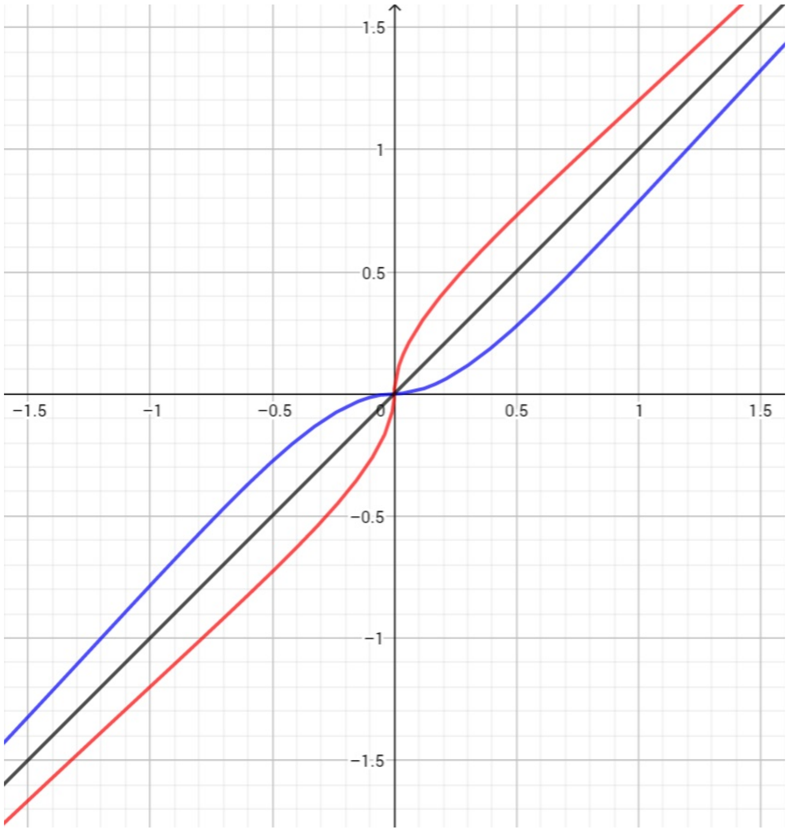
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$

ce qui permet d'en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. La limite en $-\infty$ s'en déduit par imparité de la fonction f. Conclusion,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

19. Cf question suivante.

20. La fonction f est continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ et y est strictement croissante, donc réalise une bijection de I vers $f(I) = \mathbb{R}$. Ainsi, la bijection réciproque f^{-1} existe et sa courbe représentative $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ **(en rouge)** s'obtient par symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$ **(en bleu)** par rapport à la droite d'équation $y = x$ **(en noir)**.



Partie 6 : Etude locale au voisinage de $+\infty$ de la bijection réciproque

On admet qu'il existe des coefficients réels a_0, a_1, b_1, b_2 tels que :

$$f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{=} a_1 x + a_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

21. D'après la question 13. on a

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x - \frac{1}{3x} + \frac{1}{5x^3} + \underset{+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{x^4}\right) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 - \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Par conséquent, on a l'égalité asymptotique entre fonctions suivantes :

$$\frac{1}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\frac{1}{1+o\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Or, $\frac{1}{1+u} \underset{u\to0}{=} 1 + u + o(u)$. Posons $u \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$. On a alors $o(u) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc, on a les égalités asymptotiques entre fonctions suivantes :

$$\boxed{\frac{1}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\left(1 + o\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).}$$

22. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $y = f(x)$. D'après la question 13. on sait que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et que donc notamment $y = f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, on a les égalités asymptotiques entre fonctions suivantes :

$$x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) \underset{x\to+\infty}{=} a_1 y + a_0 + \frac{b_1}{y} + \frac{b_2}{y^2} + o\left(\frac{1}{y^2}\right)$$
$$\underset{x\to+\infty}{=} a_1 y + a_0 + \frac{b_1}{f(x)} + \frac{b_2}{f(x)^2} + o\left(\frac{1}{f(x)^2}\right).$$

Or nous avons vu que $\frac{1}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ dont on déduit également que $\frac{1}{f(x)^2} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $o\left(\frac{1}{f(x)^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. D'où,

$$x \underset{x\to+\infty}{=} a_1 f(x) + a_0 + b_1\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + b_2\left(\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

En utilisant la question 13. on obtient alors

$$\begin{aligned} x &\underset{x\to+\infty}{=} a_1\left(x - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + a_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} a_1 x + a_0 - \frac{b_1 - 3a_1}{3x} + \frac{b_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Autrement dit

$$(a_1 - 1)\, x + a_0 - \frac{b_1 - 3a_1}{3x} + \frac{b_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} 0.$$

ce qui n'est possible que si $a_1 - 1 = a_0 = b_1 - 3a_1 = b_2 = 0$ (sinon on obtient 0 équivalent à un terme non nul ce que l'on sait faux bien entendu). Par conséquent

$$\boxed{a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad b_1 = 3a_1 = 3, \qquad b_2 = 0.}$$

On conclut que

$$\boxed{f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + \frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).}$$

23. On retrouve bien d'une part que $\mathscr{C}_f^{-1}$ admet la droite $y = x$ pour asymptote oblique en $+\infty$ (et donc en $-\infty$ par imparité, question 4.). D'autre part puisque

$$f^{-1}(x) - x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{x}.$$

et que $\frac{3}{x} > 0$ si et seulement si $x > 0$, on retrouve également le fait que $\mathscr{C}_f^{-1}$ est asymptotiquement au-dessus de la droite $y = x$ en $+\infty$ et asymptotiquement en-dessous de la droite $y = x$ en $-\infty$.

24. (i) On a $\frac{b_1}{x} = \frac{3}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$ et $f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$. Donc $\frac{b_1}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(f^{-1}(x)\right)$ et donc

$$\boxed{f^{-1}(x) \text{ n'est pas équivalent à } \frac{b_1}{x} \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty.}$$

(ii) De la question 22. et du fait que $o\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{3}{x} \underset{x\to+\infty}{\ll} x = a_1 x$, on en déduit directement que $\boxed{f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_1 x}$.

(iii) Puisque $\frac{50b_1^2}{x} \underset{x\to+\infty}{\ll} a_1 x = x$, on en déduit que $\boxed{a_1 x + \frac{50b_1^2}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} a_1 x \underset{x\to+\infty}{\sim} f^{-1}(x)}$, d'après le point (ii).

Partie 7 : Etude d'une asymptote

On considère la fonction g définie sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ par l'expression :

$$g(x) = x\left(\frac{f(x)}{x}\right)^x$$

25. Par définition, pour tout $x \in \mathscr{D}_g$, $g(x) = x\,\mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{f(x)}{x}\right)}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a alors les équivalences suivantes :

$$x \in \mathscr{D}_g \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \mathscr{D}_f \\ x \neq 0 \\ \frac{f(x)}{x} > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x < 0 \\ f(x) < 0 \end{cases}.$$

Or pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$ et pour tout $x < 0$, $f(x) < 0$ d'après la question 18. On en déduit donc que $\boxed{\mathscr{D}_g = \mathbb{R}^*}$.

26. D'après la question 2, on a

$$\arctan(u) \underset{x\to+\infty}{=} u - \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} g(x) = x\,\mathrm{e}^{x\ln\left(x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)} &\underset{x\to+\infty}{=} x\,\mathrm{e}^{x\ln\left(x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right)} \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\,\mathrm{e}^{x\ln\left(1-\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}. \end{aligned}$$

Posons $u \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $o(u) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Or $\ln(1+u) \underset{u\to0}{=} u + o(u)$. Donc

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{=} x\,\mathrm{e}^{x\left(-\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} \underset{x\to+\infty}{=} x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Posons $v \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De même que précédemment, on a $o(v) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$. De plus $\mathrm{e}^v \underset{v\to0}{=} 1 + v + o(v)$. Donc,

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} x - \frac{1}{3} + o(1).$$

$\boxed{\text{On en déduit que } \mathscr{C}_g \text{ possède une asymptote oblique en } +\infty \text{ d'équation } y = x - \tfrac{1}{3}.}$

Partie 8 : Résolution d'une équation

27. Soit $x \in]0;+\infty[$, par définition de f, on a

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow 4x\left(\frac{1}{(2x)^2}\arctan(2x)\right) + 9x\left(\frac{1}{(3x)^2}\arctan(3x)\right) = \frac{\pi}{4x} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x}\arctan(2x) + \frac{1}{x}\arctan(3x) = \frac{\pi}{4x} \\ &\boxed{(E) \Leftrightarrow \arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}} \qquad \text{car } x \neq 0. \end{aligned}$$

28. Soit $x \in]0;+\infty[$, puisque $\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on peut composer l'équation (E) par la fonction tangente :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\left(\arctan(2x) + \arctan(3x)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \arctan(2x) + \arctan(3x) \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[. \end{cases}$$

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a $\arctan(2x) \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\arctan(3x) \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, donc on peut utiliser la formule

$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ et le fait que $\tan(\arctan(u)) = u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\tan(\arctan(2x))+\tan(\arctan(3x))}{1-\tan(\arctan(2x))\tan(\arctan(3x))} = 1 \\ \arctan(2x)+\arctan(3x) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{2x+3x}{1-6x^2} = 1 \\ \arctan(2x)+\arctan(3x) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x = 1-6x^2 \\ 1-6x^2 \neq 0 \\ \arctan(2x)+\arctan(3x) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6x^2+5x-1 = 0 \\ x^2 \neq \frac{1}{6}. \\ \arctan(2x)+\arctan(3x) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}
\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé à $6x^2+5x-1$, on a

$$\Delta = 25+26 = 49 = 7^2 > 0.$$

Alors les racines sont

$$x = \frac{-5-7}{12} = -1 \quad \text{OU} \quad x = \frac{-5+7}{12} = \frac{1}{6}.$$

Puisque $x > 0$, il va de soi que $x \neq -1$. Donc $x = \frac{1}{6}$ est l'unique racine possible. Dans ce cas, on a bien $x^2 \neq \frac{1}{6}$, et $2x = \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ainsi que $3x = \frac{1}{2} < 1$ Par conséquent, on a bien $0 < \arctan(2x)+\arctan(3x) < \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{x = \frac{1}{6} \text{ est l'unique solution de } (E).}$$

Problème II - Ensembles et applications

Soient E un ensemble et $f : E \to E$ une application. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f^n la composée n fois de f : $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$. On pose également par convention $f^0 = \mathrm{Id}_E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit alors

$$E_n = \mathrm{Im}(f^n) = f^n(E).$$

1. On a
$$\boxed{E_0 = f^0(E) = \mathrm{Id}_E(E) = E.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $E_{n+1} \subseteq E_n$. Soit $y \in E_{n+1} = f^{n+1}(E)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^{n+1}(x)$. Donc $y = f^n(f(x))$. Posons $x' = f(x) \in E$. Alors $y = f^n(x')$. Donc $y \in f^n(E) = E_n$. Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad E_{n+1} \subseteq E_n.}$$
On admet alors (récurrence immédiate) que pour tout $i \leqslant j$, $E_i \subseteq E_j$.

3. On suppose dans cette question que f est injective.
   (a) Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)$. Supposons que $f(A) = f(B)$ et montrons que $A = B$. Soit $x \in A$. Alors $y = f(x) \in f(A) = f(B)$. Donc $y \in f(B)$ i.e. il existe $x' \in B$ tel que $y = f(x')$. Ainsi $f(x) = f(x')$. Or f est injective. Donc $x = x' \in B$. On a donc montré que si $x \in A$ alors $x \in B$. Ainsi
   $$A \subseteq B.$$
   Puis par symétrie des hypothèse, on démontre de la même façon que $B \subseteq A$. Conclusion,
   $$\boxed{A = B.}$$

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $E_p = E_{p+1}$. Alors on a $f^p(E) = f^{p+1}(E)$.
Premier cas si $p \geqslant 1$, alors $f\left(f^{p-1}(E)\right) = f(f^p(E))$ i.e. $f(E_{p-1}) = f(E_p)$. Donc d'après la question précédente, $E_{p-1} = E_p$ puis par récurrence, on obtient que $E_0 = E_1$.
Second cas, $p = 0$ alors on a directement $E_0 = E_1$.
Dans tous les cas, on a $E_0 = E_1$ i.e. $E = f(E) = \mathrm{Im}(f)$. Donc pour tout $y \in E$, $y \in f(E)$ donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, y admet un antécédent par f et ce quelque soit y. Donc f est surjective. Or par hypothèse f est injective. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est bijective.}}$$

4. Si f est surjective, alors $E = f(E)$. Donc $\boxed{E_1 = E}$. Puis de même $\boxed{E_2 = f(E_1) = f(E) = E}$. Par récurrence on obtient que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ E_n = E}$, la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à E.

5. On suppose que $E = \mathbb{N}$ et $f : n \mapsto n+1$. Alors on a $E_1 = \mathbb{N}^*$ puis $E_2 = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et ainsi de suite :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad E_n = \mathbb{N} \setminus [\![0\,;\,n-1]\!].}$$

6. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant p+1$. On suppose dans cette question que $E_k = E_p$.

(a) Soit $\forall i \in [\![p\,;\,k]\!]$. Par la décroissance de $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$E_k \subseteq E_i \subseteq E_p.$$

Donc $E_i \subseteq E_p$. De plus $E_p = E_k \subseteq E_i$. Donc par double inclusion, $E_i = E_p$. Conclusion,

$$\boxed{\forall i \in [\![p\,;\,k]\!], \qquad E_i = E_p.}$$

(b) Soit $y \in E_p$. Par hypothèse, on a $E_p = E_k$ donc $y \in E_k = f^k(E)$ i.e.

$$\boxed{\text{il existe } x \in E \text{ tel que } y = f^k(x).}$$

(c) On pose $z = f^{k-1}(x)$. Notons que $k \geqslant p+1$ donc $k-1 \geqslant p \geqslant 0$ et z est bien défini. De plus $z \in E_{k-1}$. Or $k-1 \geqslant p$ et $k-1 \leqslant k$. Donc $k-1 \in [\![p\,;\,k]\!]$. Donc par la question 6.a, on a $E_{k-1} = E_p$. Ainsi $\boxed{z \in E_k}$.

(d) Alors $z \in f^k(E)$. Donc il existe $\tilde{x} \in E$ tel que $z = f^k(\tilde{x})$. Alors $y = f(z) = f\left(f^k(\tilde{x})\right) = f^{k+1}(\tilde{x})$. Conclusion, $\boxed{y \in f^{k+1}(E) = E_{k+1}}$.

(e) En résumé des trois questions précédentes, nous avons pris $y \in E_p$ et nous avons montré que $y \in E_{k+1}$. Donc $E_p \subseteq E_{k+1}$ Or par décroissance de $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $E_{k+1} \subseteq E_p$. Donc par double inclusion,

$$\boxed{E_p = E_{k+1}.}$$

7. Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que $E_p = E_{p+1}$. On pose pour tout $k \geqslant p$:

$$\mathscr{H}(k) \qquad : \qquad \text{« } E_k = E_p \text{ »}$$

Montrons $\mathscr{H}(k)$ par récurrence.

Initialisation. Si $k = p$ alors on a bien entendu $E_k = E_p$.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant p$. Montrons que $\mathscr{H}(k) \Rightarrow \mathscr{H}(k+1)$. Supposons $\mathscr{H}(k)$ et montrons que $\mathscr{H}(k+1)$ est vraie.

Si $k = p$ alors par hypothèse on a bien par hypothèse (non pas de récurrence mais émis au début de la question) $E_{k+1} = E_{p+1} = E_p$. Donc $\mathscr{H}(k+1)$ est vraie.

Si $k \geqslant p+1$, alors par hypothèse de récurrence, $E_k = E_p$. Donc d'après la question 6., on a $E_{k+1} = E_p$. Donc $\mathscr{H}(k+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $k \geqslant p$, $\mathscr{H}(k)$ est vraie.

Conclusion, si $E_p = E_{p+1}$ alors

$$\boxed{\forall k \geqslant p, \qquad E_k = E_p.}$$