Devoir Maison 7
Suites, polynômes, espaces vectoriels, séries

A faire pour le lundi 04 mars

Problème I - Suites numériques

On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{1-x-2x^2\ln(x)}{4}$,

Partie 1 : Carte d'identité de f

1. Démontrer que f est prolongeable par continuité en 0. On appellera toujours f la fonction prolongée. Préciser alors $f(0)$.
2. Démontrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. La fonction f est-elle deux fois dérivable en 0 ?
4. Dresser le tableau de variation de f' sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire le tableau de variation de f sur $[0;1]$.
5. Déduire proprement de la question précédente que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \in [0;1[$ et $|f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}$.
6. Montrer que f est $\frac{3}{4}$-lipschitzienne sur $[0;1]$.
7. Montrer que f admet un unique point fixe dans $[0;1]$. On notera ℓ ce point fixe.

Partie 2 : Ce qui est implicite veut souvent tout dire

8. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n \in [0;1]$ tel que $f(x_n) = \frac{1}{4n}$.
9. Déterminer la stricte monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
10. Justifier que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge puis déterminer sa limite.
11. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$.
12. Déterminer un équivalent de f en 1.
13. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n = 1 - x_n$. Déduire de la question précédente que $h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$.
14. En déduire la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} h_n$.

Partie 3 : C'est en itérant encore et encore que l'on parvient au succès

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

15. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1[$.
16. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - \ell|$.
17. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
18. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = u_n - \ell$. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} t_n$.
19. Ecrire un programme Python prenant une precision r en paramètre et retournant une valeur de ℓ à la précision r. L'appliquer pour obtenir une valeur de ℓ à la précision 10^{-5}.

Partie 4 : Diviser la suite, pour mieux régner

On n'utilisera pas dans cette partie les résultats de la partie 3
On pose la fonction $g : [0;1[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0;1[$ par $g(x) = f \circ f(x)$. On pose également les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

20. Justifier que g est bien définie.
21. Sans calcul, quelle est la monotonie de g ? Le démontrer rigoureusement.
22. Déterminer la monotonie des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
23. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|v_{n+1} - w_{n+1}| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^2 |v_n - w_n|.$$
24. En déduire que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
25. Retrouver alors le résultat de la question 17..

Problème II - Polynômes

On définit
$$P_0 = 2 \qquad P_1 = X + \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = \left(X + \frac{1}{2}\right) P_{n+1} - \frac{1}{16} P_n.$$
L'objectif est de donner la factorisation des polynômes P_n. On ne demande pas de vérifier que la suite des polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et de manière unique.

Partie 1 : Il était une fois une famille de gnomes très polis...

1. Préciser P_2 et P_3.
2. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Montrer qu'il existe une racine, que l'on précisera, qui est commune à tous les polynômes P_{2n+1}, $n \in \mathbb{N}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = P_n(0)$. Déterminer une relation de récurrence pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire son expression explicite.
5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la dérivée k-ième de P_{n+2} en fonction de $P_{n+1}^{(k-1)}$, $P_{n+1}^{(k)}$ et $P_n^{(k)}$.

Partie 2 : ... et sages comme des images. Ils élevaient des petits θr...

On considère la fonction
$$h : \begin{array}{ccc} \left[0; \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & -\cos^2(\theta) \end{array}$$
et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,
$$f_n(\theta) = P_n(h(\theta)).$$

6. Exprimer pour tout $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f_1(\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$.
7. Exprimer pour tout $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f_2(\theta)$ en fonction uniquement de $\cos(4\theta)$.
8. Démontrer par une récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\forall \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \; f_n(\theta) = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \cos(2n\theta).$$
9. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(-1)$.
10. Calculer également pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Partie 3 : ...ils buvaient de l'eau et mangeaient des racines...

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, on pose

$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{4n} \qquad \text{et} \qquad r_k = h(\theta_k).$$

11. Montrer que pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, r_k est une racine de P_n.

12. Montrer que la fonction h est bijective et préciser son ensemble image $h\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

13. Montrer que pour tout $(i, j) \in [\![0; n-1]\!]^2$, si $i \neq j$, alors $r_i \neq r_j$.

14. En déduire que P_n ne possède pas d'autre racine que les r_k et préciser la factorisation complète de P_n.

15. Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} r_k$.

Partie 4 : ...bref tout Rolleait pour eux !

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On note $\tilde{P_n}$ la fonction polynomiale associée à P_n.

16. (a) Montrer que $\tilde{P_n}$ est de signe constant sur $\mathbb{R}_+$.

    (b) Montrer que $\tilde{P_n}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.

17. On suppose $n \geqslant 2$. Justifier que $\tilde{P_n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que $\tilde{P_n}'$ admet $n-1$ racines distinctes dans $[-1; 0]$.

Problème III - Espace Vectoriel

Pour E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, on pose $F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = 0_{\mathbb{R}}\}$.

Partie 1 : La base, c'est s'adapter.

On suppose dans cette partie que $E = \mathbb{R}_4[X]$ et on pose $\mathscr{B} = \left(1, X, X(X-1), X^2(X-1), X^3(X-1)\right)$.

1. Rappeler sans démonstration la base canonique de E.

2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

3. Montrer que $\mathscr{B}$ est génératrice de E.

4. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.

5. Montrer que $\mathscr{B}_F = \left(X(X-1), X^2(X-1), X^3(X-1)\right)$ est une base de F.

6. En déduire que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans E.

Partie 2 : La division unifie le tout !

On suppose dans cette partie que $E = \mathbb{R}[X]$ et on admet que F est un sous-espace vectoriel de E.

7. Montrer que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont en somme directe.

8. Soit $P \in E$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X(X-1)$ en fonction de $P(0)$ et $P(1)$.

9. En déduire que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans E.

Problème IV - Séries numériques

On fixe dans tout ce problème $N \in \mathbb{N}^*$. Dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère pour tout $p \in [\![0;N]\!]$,

$$f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^p \,\mathrm{e}^{-x}.$$

Partie 1 : Riemann part se promener en pleine nature...

1. Si $p = 0$, montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_0(n)$ converge et déterminer $S(f_0)$ sa somme totale.
2. On reprend $p \in [\![0;N]\!]$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_p(n)$ converge.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_p(n+x)$.
4. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_p\left(\frac{1}{n}\right)$.

Partie 2 : ...la géométrique le suit pour ne pas être en reste...

On suppose $p = 1$.

5. A l'aide d'un glissement d'indice, montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=0}^{m} f_1(k) = \mathrm{e}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-(m+1)}}{(\mathrm{e}-1)^2} - \frac{(m+1)\,\mathrm{e}^{-m}}{\mathrm{e}-1}.$$
6. En déduire la somme totale de $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_1(n)$.
7. Après avoir justifier l'existence du reste d'ordre n de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_1(n)$, en déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$.

Partie 3 : ...heureusement les intégrales viennent encadrer tout ça.

On suppose $p = 2$.

8. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, calculer par intégrations par parties $\int_a^b t^2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
9. Etablir le tableau de variation de f_2 sur $\mathbb{R}_+$.
10. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $m \geqslant n+1$,
$$g(n+1) - g(m+1) \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} f_2(k) \leqslant g(n) - g(m),$$
où $g : x \mapsto \left(x^2+2x+2\right)\mathrm{e}^{-x}$.
11. Justifier l'existence du reste d'ordre n de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_2(n)$, que l'on notera R_n puis montrer qu'il existe $(a,A) \in \mathbb{R}_+^*$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,
$$an^2\,\mathrm{e}^{-n} \leqslant R_n \leqslant An^2\,\mathrm{e}^{-n}.$$