Correction du Devoir Maison 7
Suites, polynômes, espaces vectoriels, séries

Du lundi 04 mars

Problème I - Suites numériques

On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{1 - x - 2x^2 \ln(x)}{4}.$$

Partie 1 : Carte d'identité de f

1. On sait par croissance comparée que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^2 \ln(x) = 0$. Ainsi f admet une limite finie en 0 qui est

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \frac{1}{4}.$$

Donc

$$\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } f(0) = \frac{1}{4}.}$$

2. La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions usuelles $\mathscr{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = \frac{-1 - 4x\ln(x) - \frac{2x^2}{x}}{4} = -\frac{1 + 2x + 4x\ln(x)}{4}.$$

Etude en 0. Par croissance comparée, on constate que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = -\frac{1}{4}.$$

Donc

(i) f est continue sur $[0; +\infty[$,

(ii) de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0; +\infty[$,

(iii) sa dérivée admet une limite finie en 0^+.

Donc d'après le théorème de prolongement de fonction de classe $\mathscr{C}^1$, on en déduit que f est $\mathscr{C}^1$ en 0 et

$$f'(0) = -\frac{1}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$

3. *Méthode 1 par le taux d'accroissement.* Puisque l'on sait déjà que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que$f$ est deux fois dérivable si et seulement si

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} \qquad \text{existe dans } \mathbb{R}.$$

Pour tout $x>0$, on a

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \frac{-\frac{1+2x+4x\ln(x)}{4}+\frac{1}{4}}{x} = -\frac{2x+4x\ln(x)}{4x} = -\frac{2+4\ln(x)}{4} = -\frac{1}{2}-\ln(x).$$

Par conséquent

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = +\infty.$$

Donc f' n'est pas dérivable en 0 (et admet même une tangente verticale en ce point) i.e. f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Méthode 2 par le théorème de prolongement de fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Posons $g=f'$ sur $[0;+\infty[$. La fonction g est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$,

$$g'(x) = \left(-\frac{1+2x+4x\ln(x)}{4}.\right)' = -\frac{2+4\ln(x)+4}{4} = -\frac{3}{2}-\ln(x).$$

On constate que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g'(x) = +\infty.$$

On en déduit directement (proposition III.18 chapitre 14) que g n'est pas dérivable en 0 (et même admet une tangente verticale en ce point) i.e. f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ n'est pas deux fois dérivable en 0.}}$$

4. Avec les notations de la question précédente, on a vu que pour tout $x>0$,

$$f''(x) = g'(x) = -\frac{3}{2}-\ln(x).$$

Soit $x>0$. On a les équivalences suivantes :

$$f''(x)>0 \;\Leftrightarrow\; \ln(x) < -\frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; x < \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \;\textit{ par stricte croissance de la fonction exponentielle.}$$

Donc f' est strictement croissante sur $\left]0;\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right[$ et par continuité de f' sur $\mathbb{R}_+$ (question 2.), f' est strictement croissante sur $\left[0;\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right]$ et de même strictement décroissante sur $\left[\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}};+\infty\right[$. De plus, on a vu que $f'(0)=-\frac{1}{4}$ et $\forall x>0$, $f'(x)=-\frac{1+2x+4x\ln(x)}{4}$. Donc

$$f'\left(\mathrm{e}^{-3/2}\right) = -\frac{1+2\,\mathrm{e}^{-3/2}+4\,\mathrm{e}^{-3/2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{4} = -\frac{1-4\,\mathrm{e}^{-3/2}}{4}.$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty.$$

Ainsi, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$\mathrm{e}^{-3/2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f'	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$-\frac{1-4\,\mathrm{e}^{-3/2}}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

On observe alors que pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) \leqslant -\frac{1-4\,\mathrm{e}^{-3/2}}{4} < 0$. Donc la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et notamment sur $[0;1]$. Or, on a posé $f(0) = \frac{1}{4}$ et on a $f(1) = \frac{1-1+2\ln(1)}{4} = 0$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
f	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

5. Par décroissance de la fonction f sur $[0;1]$, on a

$$\forall x \in [0;1], \qquad f(0) \geqslant f(x) \geqslant f(1) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{4} \geqslant f(x) \geqslant 0$$

En particulier,

$$\forall x \in [0;1], \qquad f(x) \in [0;1[.$$

d'autre part, on a

$$f'(1) = -\frac{1+2+4\ln(1)}{4} = -\frac{3}{4}.$$

Du tableau de variation de f' de la question précédente on en déduit le suivant :

x	0		$\mathrm{e}^{-3/2}$		1
f'	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$-\frac{1-4\,\mathrm{e}^{-3/2}}{4}$	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$

Ainsi,

$$\forall x \in [0;1], \qquad \min\left(-\frac{1}{4}\,;\,-\frac{3}{4}\right) \leqslant f'(x) \leqslant -\frac{1-4\,\mathrm{e}^{-3/2}}{4} < 0$$

Donc

$$\forall x \in [0;1], \qquad |f'(x)| = -f'(x) \leqslant \left|\min\left(-\frac{1}{4}\,;\,-\frac{3}{4}\right)\right| = \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}.$$

Conclusion, on a montré que

$$\boxed{\forall x \in [0;1], \qquad f(x) \in [0;1[\qquad \text{et} \qquad |f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}.}$$

6. Par ce qui précède, f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. Soit $(x,y) \in [0;1]^2$, $x \neq y$. Alors,
   - f est continue sur $[x;y]$ (ou $[y;x]$),
   - f est dérivable sur $]x;y[$ (ou $]y;x[$)

   Donc par l'identité des accroissements finis,
$$\exists z \in]x;y[\ \text{(ou }]y;x[), \quad \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(z).$$
   Donc
$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f'(z)|\,|x-y|\,.$$
   Or $z \in]x;y[\subseteq [0;1]$. Donc par la question précédente, $|f'(z)| \leqslant \frac{3}{4}$. Ainsi,
$$|f(x)-f(y)| \leqslant \frac{3}{4}\,|x-y|\,,$$
   ce qui reste vrai si $x = y$. Conclusion,
$$\forall\,(x,y) \in [0;1]^2\,, \quad |f(x)-f(y)| \leqslant \frac{3}{4}\,|x-y|\,.$$
   Autrement dit
$$\boxed{f \text{ est } \frac{3}{4}\text{-lispchitzienne sur } [0;1].}$$

7. Posons pour tout $x \in [0;1]$,
$$h(x) = f(x) - x.$$
   On a vu que f est strictement décroissante sur $[0;1]$. Puisque $x \mapsto -x$ est aussi strictement décroissante sur $[0;1]$, on en déduit que h est aussi strictement décroissante sur $[0;1]$ comme somme de deux fonctions strictement décroissantes. De plus h est continue sur $[0;1]$ et $h(0) = f(0) - 0 = \frac{1}{4} > 0$ et $h(1) = 0 - 1 < 0$. Donc d'après le corollaire du théorème de la bijection, il existe un unique réel $\ell \in]0;1[$ tel que $h(\ell) = 0$ i.e.
$$\boxed{\exists!\ell \in]0;1[\,, \qquad f(\ell) = \ell.}$$

Partie 2 : Ce qui est implicite veut souvent tout dire

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
   - par la question 1. f est continue sur $[0;1]$,
   - par la question 4. la fonction f est strictement décroissante sur $[0;1]$,
   - $f(0) = \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{4n}$ et $f(1) = 0 \leqslant \frac{1}{4n}$.

   Donc par le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème de la bijection),
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x_n \in [0;1]\,, \quad f(x_n) = \frac{1}{4n}.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$\frac{1}{4n} > \frac{1}{4\,(n+1)}.$$
   Donc
$$f(x_n) > f(x_{n+1})\,.$$
   Or $x_n \in [0;1]$, $x_{n+1} \in [0;1]$. Donc par la stricte décroissance de f sur $[0;1]$, on en déduit que
$$x_n < x_{n+1}.$$
   Conclusion,
$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante.}}$$

10. Par ce qui précède, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et majorée par 1 (car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0;1]$). Donc par le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

Notons α sa limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ donc par passage à la limite, $\alpha \in [0;1]$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(x_n) = \frac{1}{4n}.$$

Or la fonction f est continue sur $[0;1]$ et $\alpha \in [0;1]$. Donc par caractérisation séquentielle de la continuité de f en α, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\alpha).$$

Ainsi, par passage à la limite dans $f(x_n) = \frac{1}{4n}$, on obtient,

$$f(\alpha) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(\alpha) = f(1).$$

La fonction f étant strictement décroissante sur $[0;1]$, elle est injective sur cet ensemble et donc

$$\alpha = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 1.}$$

11. Par la question précédente, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ diverge grossièrement.

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n \text{ diverge.}}$$

12. Pour tout $x \geqslant 0$, posons $h = x - 1$ i.e. $x = 1 + h$. Dès lors,

$$f(x) = f(1+h) = \frac{1 - (1+h) - 2(1+h)^2 \ln(1+h)}{4}.$$

Donc

$$f(1+h) \underset{h\to 0}{=} \frac{-h - 2\left(1 + 2h + h^2\right)(h + o(h))}{4} \underset{h\to 0}{=} \frac{-h - 2h + o(h)}{4} \underset{h\to 0}{=} -\frac{3}{4}h + o(h).$$

Par conséquent,

$$f(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} -\frac{3}{4}h$$

ou encore

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{3}{4}(x-1).}$$

13. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n = 1 - x_n$. On sait que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc par la question précédente,

$$f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{4}(x_n - 1) = \frac{3}{4}h_n.$$

Or par construction de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f(x_n) = \frac{1}{4n}$. Ainsi,

$$\frac{1}{4n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{4}h_n \qquad \Leftrightarrow \qquad h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}.}$$

14. On sait que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge en tant que série harmonique (ou de Riemann d'exposant $\alpha = 1 < 2$). Or,

    - par la question précédente, $h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$
    - $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{3n} > 0$

    Conclusion, par le théorème des équivalents des séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} h_n \text{ diverge.}}$$

Partie 3 : C'est en itérant encore et encore que l'on parvient au succès

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

15. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathscr{P}(n)$: « u_n existe et $u_n \in [0;1[$ ». Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

    Initialisation. Si $n = 0$, alors par définition, u_0 existe et $u_0 = 0 \in [0;1[$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

    Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors u_n existe et $u_n \in [0;1[$. Or f est définie sur $[0;1[$ donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe. De plus on a vu dans la question 5. que pour tout $x \in [0;1[$, $f(x) \in [0;1[$. Par conséquent, on a aussi $u_{n+1} = f(u_n) \in [0;1[$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

    Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a donc bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

    Donc

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \in [0;1[.}$$

16. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de u_{n+1} et puisque ℓ est un point fixe de f, on a

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)|.$$

    Or par la question 6. f est $\frac{3}{4}$-lipschitzienne sur $[0;1]$ et on sait que $u_n \in [0;1]$ et $\ell \in [0;1]$. D'où

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - \ell|.$$

    Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - \ell|.}$$

17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \ell|$ ». Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

    Initialisation. Si $n = 0$ alors

$$|u_0 - \ell| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^0 |u_0 - \ell|.$$

    Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

    Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie i.e.

$$|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \ell|.$$

    Alors de la question précédente, on en déduit que

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - \ell| \leqslant \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \ell| = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} |u_0 - \ell|.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

On a donc montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \ell|.$$

Or $\frac{3}{4} \in [0;1]$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \ell| = 0.$$

Donc par le théorème d'encadrement, on a

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n - \ell| = 0$$

i.e.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge et sa limite vaut } \ell.}$$

18. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = u_n - \ell$. On a vu dans la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \ell|.$$

Or $u_0 = 0$ et $\ell \in [0;1]$ donc $|u_0 - \ell| = |\ell| \leqslant 1$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

ou encore,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |t_n| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

De plus, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ est une série géométrique de raison $q = \frac{3}{4} \in]-1;1[$. Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ converge. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |t_n| \text{ converge.}$$

Autrement dit $\sum_{n \in \mathbb{N}} t_n$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} t_n \text{ converge.}}$$

19. On a vu dans la question précédente que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

On en déduit une majoration de l'erreur. Soit $r > 0$,

$$|u_n - \ell| \leqslant r \quad \Leftarrow \quad \left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant r,$$

i.e. $\left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant r$ est une condition suffisante pour que u_n soit proche de ℓ à r-près. Or

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant r \qquad \Leftrightarrow \qquad n\ln\left(\frac{3}{4}\right) \leqslant \ln(r) \qquad \Leftrightarrow \qquad n \geqslant \frac{\ln(r)}{-\ln\left(\frac{4}{3}\right)}.$$

Donc en prenant $n \geqslant \left\lfloor \frac{\ln(r)}{-\ln\left(\frac{4}{3}\right)} \right\rfloor$, on sait que $\ell \in [\ell - r; \ell + r]$. Voici donc un exemple de programme Python retournant le valeur approchée de ℓ à une précision de r :

```python
import numpy as np

def mafonction(x):
    if x==0:
        y=1/4
    else:
        y=(1-x-2*x**2*np.log(x))/4
    return y

def DM8(r):
    n=int(np.log(r)/np.log(3/4))
    u=0
    for i in range(n):
        u=mafonction(u)
    return u
```

On obtient notamment pour $r = 10^{-5}$,

$$0,23134 - 10^{-5} \leqslant \ell \leqslant 0,23134 + 10^{-5}.$$

Partie 4 : Diviser la suite, pour mieux régner

On n'utilisera pas dans cette partie les résultats de la partie 3
On pose la fonction $g : [0;1[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0;1[$ par $g(x) = f \circ f(x)$. On pose également les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_{2n} \qquad \text{et} \qquad w_n = u_{2n+1}.$$

20. La fonction f est bien définie sur $[0;1[$ d'après la question 1.. De plus, on a vu dans la question 5. que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \in [0;1]$, notamment, pour tout $x \in [0;1[$, $f(x) \in \mathbb{R}_+$ et f étant bien définie sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $f(f(x))$ qui existe. Conclusion,

$$\boxed{g \text{ est bien définie sur } [0;1[.}$$

21. Puisque f est strictement décroissante sur $[0;1]$ (question 4.) et que $f([0;1[) \subseteq [0;1[$, on en déduit que $g = f \circ f$ est de monotonie opposée à celle de f i.e. est strictement croissante sur $[0;1[$. Démontrons-le. Soit $(x,y) \in [0;1[^2$ on a par stricte décroissance de f les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x < y \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) > f(y) && car\ (x,y) \in [0;1[^2 \\ &\Leftrightarrow \quad f(f(x)) < f(f(y)) && car\ (f(x), f(y)) \in [0;1[^2 \\ &\Leftrightarrow \quad g(x) < g(y). \end{aligned}$$

Donc par définition,

$$\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur } [0;1[.}$$

22. Par définition des différentes suites, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = f\left(u_{2n+1}\right) = f\left(f\left(u_{2n}\right)\right) = g\left(u_{2n}\right) = g\left(v_n\right).$$

de même

$$w_{n+1} = u_{2n+3} = g\left(u_{2n+1}\right) = g\left(w_n\right).$$

Or, on a $v_0 = u_0 = 0$ et

$$v_1 = u_2 = f\left(f\left(u_0\right)\right) = f\left(f\left(0\right)\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1 - \frac{1}{4} - 2\frac{1}{16}\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{4} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\ln\left(2\right)}{4} = \frac{3 + \ln\left(2\right)}{16} > 0.$$

Donc $v_1 > v_0$. De plus, g est strictement croissante sur $[0;1[$ et $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est, en tant que sous-suite de $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0;1[$. On démontre donc par récurrence (bien sûr !) que

$$\boxed{\text{la suite } \left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$$

On peut raisonner de même pour $\left(w_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Sinon, par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = u_{2n+1} = f\left(u_{2n}\right) = f\left(v_n\right).$$

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n < v_{n+1}.$$

La suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0;1[$ et f est strictement décroissante sur $[0;1[$. Donc,

$$f\left(v_n\right) \geqslant f\left(v_{n+1}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad w_n \geqslant w_{n+1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } \left(w_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$$

23. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\left|v_{n+1} - w_{n+1}\right| = \left|u_{2n+2} - u_{2n+3}\right| = \left|f\left(u_{2n+1}\right) - f\left(u_{2n+2}\right)\right|.$$

Or la fonction f est $\frac{3}{4}$-lipschitzienne sur $[0;1]$ (question 6.) et la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0;1[$. Donc

$$\left|v_{n+1} - w_{n+1}\right| \leqslant \frac{3}{4}\left|u_{2n+1} - u_{2n+2}\right| = \frac{3}{4}\left|f\left(u_{2n}\right) - f\left(u_{2n+1}\right)\right|.$$

A nouveau, puisque f est $\frac{3}{4}$-lipschitzienne,

$$\left|v_{n+1} - w_{n+1}\right| \leqslant \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\left|u_{2n} - u_{2n+1}\right| = \left(\frac{3}{4}\right)^2\left|u_{2n} - u_{2n+1}\right| = \left(\frac{3}{4}\right)^2\left|v_n - w_n\right|.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|v_{n+1} - w_{n+1}\right| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^2\left|v_n - w_n\right|.}$$

24. Posons $q = \left(\frac{3}{4}\right)^2$. De même que dans la question 17., on démontre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|v_n - w_n\right| \leqslant q^n\left|v_0 - w_0\right| = q^n\left|u_0 - u_1\right| = \left(\frac{3}{4}\right)^{2n}\frac{1}{4}.$$

Or $q \in [0;1]$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} q^n\left|u_0 - u_1\right| = 0.$$

Donc par encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|v_n - w_n\right| = 0.$$

Ainsi,

- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
- $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - w_n = 0$.

Conclusion,

$$\boxed{\text{les suites } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes.}}$$

25. Puisqu'elles sont adjacentes, on peut affirmer que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune notée α. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant la suite des termes pairs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant la suite des termes impairs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et la limite de ces deux suites étant identique, on en déduit d'une propriété du cours que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette limite commune α. Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$$

Problème II - Polynômes

On définit

$$P_0 = 2 \qquad P_1 = X + \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = \left(X + \frac{1}{2}\right) P_{n+1} - \frac{1}{16} P_n.$$

L'objectif est de donner la factorisation des polynômes P_n. On ne demande pas de vérifier que la suite des polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et de manière unique.

Partie 1 : Il était une fois une famille de gnomes très polis...

1. Pour $n = 0$, on a

$$P_2 = \left(X + \frac{1}{2}\right) P_1 - \frac{1}{16} P_0 = \left(X + \frac{1}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{16} = X^2 + X + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = X^2 + X + \frac{1}{8}.$$

Pour $n = 1$, on obtient,

$$\begin{aligned} P_3 = \left(X + \frac{1}{2}\right) P_2 - \frac{1}{16} P_1 &= \left(X + \frac{1}{2}\right)\left(X^2 + X + \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{16}\left(X + \frac{1}{2}\right) \\ &= X^3 + X^2 + \frac{1}{8}X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}X - \frac{1}{32} \\ &= X^3 + \frac{3}{2}X^2 + \frac{9}{16}X + \frac{1}{32}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{P_2 = X^2 + X + \frac{1}{8} \qquad \text{et} \qquad P_3 = X^3 + \frac{3}{2}X^2 + \frac{9}{16}X + \frac{1}{32}.}$$

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: « $\deg(P_n) = n$ et le coefficient dominant de P_n est 1 ». Procédons par une récurrence double.

Initialisation. Si $n = 1$, $P_1 = X + \frac{1}{2}$, on a bien $\deg(P_1) = 1$ et son coefficient dominant est 1. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Si $n = 2$, alors $P_2 = X^2 + X - \frac{1}{4}$ et donc $\deg(P_2) = 2$ et son coefficient dominant est 1. Donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $(\mathscr{P}(n) \text{ et } \mathscr{P}(n+1)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+2)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies et montrons que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence $\deg(P_n) = n$ et $\deg(P_{n+1}) = n+1$. Donc $\deg\left(\left(X + \frac{1}{2}\right) P_{n+1}\right) = n+2$ et $\deg\left(\frac{1}{16}P_n\right) = n < n+2$. Ainsi,

$$\deg(P_{n+2}) = \deg\left(\left(X + \frac{1}{2}\right) P_{n+1} - \frac{1}{16} P_n\right) = n + 2.$$

De plus le coefficient dominant de $\left(X+\frac{1}{2}\right)P_{n+1}-\frac{1}{16}P_n$ est celui de $\left(X+\frac{1}{2}\right)P_{n+1}$ et donc 1. Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion, par récurrence double, on en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Conclusion,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \deg(P_n)=n \text{ et le coefficient dominant de } P_n \text{ est } 1.}$$

3. Si $n=0$, on observe que $-\frac{1}{2}$ est une racine de $P_{2\times 0+1}=X+\frac{1}{2}$. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $-\frac{1}{2}$ est une racine de P_{2n+1}. »

   Initialisation. On vient de voir que pour $n=0$, $-\frac{1}{2}$ est une racine de P_1. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

   Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors $-\frac{1}{2}$ est une racine de P_{2n+1}. Donc

$$P_{2n+3}\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)P_{2n+2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{16}P_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{16}P_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)=0.$$

   Et donc par hypothèse de récurrence, $P_{2n+3}\left(-\frac{1}{2}\right)=0$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

   Conclusion,

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ -\frac{1}{2} \text{ est une racine de } P_{2n+1}.}$$

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$u_{n+2}=P_{n+2}(0)=\left(0+\frac{1}{2}\right)P_{n+1}(0)-\frac{1}{16}P_n(0)=\frac{u_{n+1}}{2}-\frac{u_n}{16}.$$

   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est donnée par

$$r^2-\frac{r}{2}+\frac{1}{16}=0 \qquad\Leftrightarrow\qquad \left(r-\frac{1}{4}\right)^2=0.$$

   On observe alors que nous sommes en présence d'une racine double $r_0=4$. Donc

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n=\frac{\lambda+\mu n}{4^n}.$$

   Cependant on a $u_0=P_0(0)=2$ et $u_1=P_1(0)=\frac{1}{2}$. Ainsi

$$\begin{cases}\lambda=2\\ \frac{\lambda+\mu}{4}=\frac{1}{2}\end{cases}\qquad\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}\lambda=2\\ \mu=2-2=0.\end{cases}$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n=\frac{2}{4^n}=\frac{1}{2^{2n-1}}.}$$

5. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $P_{n+2}=\left(X+\frac{1}{2}\right)P_{n+1}-\frac{1}{16}P_n$. On en déduit que

$$P_{n+2}^{(k)}=\left[\left(X+\frac{1}{2}\right)P_{n+1}\right]^{(k)}-\frac{1}{16}P_n^{(k)}.$$

   Par la formule de Leibniz,

$$P_{n+2}^{(k)}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(X+\frac{1}{2}\right)^{i}P_{n+1}^{(k-i)}-\frac{1}{16}P_n^{(k)}.$$

Or $\left(X+\frac{1}{2}\right)^i = X+\frac{1}{2}$, $\left(X+\frac{1}{2}\right)^i = 1$ et pour tout $i \geqslant 2$, $\left(X+\frac{1}{2}\right)^i = 0$. Puisque $k \geqslant 1$, on en déduit que

$$P_{n+2}^{(k)} = \left(X+\frac{1}{2}\right)P_{n+1}^{(k)} + kP_{n+1}^{(k-1)} - \frac{1}{16}P_n^{(k)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{P_{n+2}^{(k)} = \left(X+\frac{1}{2}\right)P_{n+1}^{(k)} + kP_{n+1}^{(k-1)} - \frac{1}{16}P_n^{(k)}.}$$

Partie 2 : ... et sages comme des images. Ils élevaient des petits θr...

On considère la fonction

$$h : \begin{array}{ccc} \left[0;\frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & -\cos^2(\theta) \end{array}$$

et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$,

$$f_n(\theta) = P_n(h(\theta)).$$

6. Soit $\theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. On a

$$f_1(\theta) = P_1(h(\theta)) = h(\theta) + \frac{1}{2} = -\cos^2(\theta) + \frac{1}{2}.$$

En linéarisant, on obtient

$$f_1(\theta) = -\frac{1+\cos(2\theta)}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{\cos(2\theta)}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall \theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \qquad f_1(\theta) = -\frac{\cos(2\theta)}{2}.}$$

7. Soit $\theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. De la même façon, on a

$$\begin{aligned} f_2(\theta) = P_2(h(\theta)) &= h(\theta)^2 + h(\theta) + \frac{1}{8} \qquad \text{par la question 1.} \\ &= \cos^4(\theta) - \cos^2(\theta) + \frac{1}{8} \\ &= \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)^2 - \frac{1+\cos(2\theta)}{2} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{1+2\cos(2\theta)+\cos^2(2\theta)}{4} - \frac{1+\cos(2\theta)}{2} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{2+4\cos(2\theta)+2\cos^2(2\theta)-4-4\cos(2\theta)+1}{8} \\ &= \frac{2\cos^2(2\theta)-1}{8} \\ &= \frac{\cos(4\theta)}{8}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall \theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \qquad f_2(\theta) = \frac{\cos(4\theta)}{8}.}$$

8. Soit $\theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathscr{P}(n) : \qquad \text{« } f_n(\theta) = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos(2n\theta). \text{ ».}$$

Initialisation. Si $n=0$, on a $\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos(2n\theta)=\frac{1}{2^{-1}}\cos(0)=2=P_0(h(\theta))=f_0(\theta)$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Si $n=1$, on a $\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos(2n\theta)=-\frac{\cos(2\theta)}{2}$. Donc d'après la question 6., $\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos(2n\theta)=f_1(\theta)$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies. Alors,

$$\begin{aligned}
f_{n+2}(\theta) &= P_{n+2}(h(\theta)) \\
&= \left(h(\theta)+\frac{1}{2}\right)P_{n+1}(h(\theta))-\frac{1}{16}P_n(h(\theta)) \\
&= f_1(\theta)\,f_{n+1}(\theta)-\frac{1}{16}f_n(\theta) \\
&= -\frac{\cos(2\theta)}{2}f_{n+1}(\theta)-\frac{1}{16}f_n(\theta) && \text{par la question 6.} \\
&= -\frac{\cos(2\theta)}{2}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+2-1}}\cos((2n+2)\theta)-\frac{1}{16}\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos(2n\theta) && \text{par les hypothèses de récurrence.}
\end{aligned}$$

Donc on obtient les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& f_{n+2}(\theta)=\frac{(-1)^{n+2}}{2^{2(n+2)-1}}\cos(2(n+2)\theta) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{(-1)^n}{2^{2n+3}}\cos((2n+4)\theta)=-\frac{\cos(2\theta)}{2}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+2-1}}\cos((2n+2)\theta)-\frac{1}{16}\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos(2n\theta) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2^{2n+3}}\cos((2n+4)\theta)=\frac{\cos(2\theta)}{2}\frac{1}{2^{2n+2-1}}\cos((2n+2)\theta)-\frac{1}{16}\frac{1}{2^{2n-1}}\cos(2n\theta) \\
\Leftrightarrow\quad & \cos((2n+4)\theta)=2\cos(2\theta)\cos((2n+2)\theta)-\cos(2n\theta) \\
\Leftrightarrow\quad & \cos((2n+4)\theta)=\cos((2n+2)\theta+2\theta)+\cos((2n+2)\theta-2\theta)-\cos(2n\theta) \\
\Leftrightarrow\quad & \cos((2n+4)\theta)=\cos((2n+4)\theta)+\cos(2n\theta)-\cos(2n\theta)
\end{aligned}$$

La dernière assertion étant toujours vraie, on en déduit bien que

$$f_{n+2}(\theta)=\frac{(-1)^{n+2}}{2^{2(n+2)-1}}\cos(2(n+2)\theta).$$

Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Conclusion,

$$\boxed{\forall\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right],\ \forall n\in\mathbb{N},\ f_n(\theta)=\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos(2n\theta).}$$

9. Soit $n\in\mathbb{N}$. On observe que $-1=-\cos^2(0)=h(0)$. Donc

$$P_n(-1)=P_n(h(0))=f_n(0).$$

Par la question précédente,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad P_n(-1)=\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}.}$$

10. Soit $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$-\cos^2(\theta)=-\frac{1}{2}\qquad\Leftrightarrow\qquad\cos^2(\theta)=\frac{1}{2}\qquad\Leftrightarrow\qquad\cos(\theta)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Or $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(\theta) \geqslant 0$ et donc $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ce qui est vrai si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{4}$ (car $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$). Ainsi,

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par la question 8., on a

$$P_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right) = P_{2n}\left(h\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = f_{2n}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{(-1)^{2n}}{2^{4n-1}}\cos\left(4n\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2^{4n-1}}\cos(n\pi) = \frac{(-1)^n}{2^{4n-1}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{2^{4n-1}}.}$$

Partie 3 : ...ils buvaient de l'eau et mangeaient des racines...

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, on pose

$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{4n} \qquad \text{et} \qquad r_k = h(\theta_k).$$

11. Calculons : pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, on a

$$P_n(r_k) = P_n(h(\theta_k)) = f_n(\theta_k).$$

On observe que pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{4n} \leqslant \frac{(2n-1)\pi}{4n} \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $\theta_k \geqslant 0$ donc $\theta_k \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, par la question 8., pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$,

$$P_n(r_k) = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos(2n\theta_k) = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos\left(2n\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right) = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![0; n-1]\!],\ r_k \text{ est une racine de } P_n.}$$

12. La fonction h est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $h'(\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$. Or pour tout $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $h'(\theta) > 0$. Donc la fonction h est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. De plus h est continue sur cet intervalle. Donc par le théorème de la bijection,

$$\boxed{h \text{ définie une bijection de } \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ dans } \left[h(0); h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1; 0].}$$

13. Soient $(i, j) \in [\![0; n-1]\!]^2$ tel que $r_i = r_j$. Alors, $h(\theta_i) = h(\theta_j)$. Or on vient de voir que h est bijective et donc injective. Ainsi, $\theta_i = \theta_j$ ou encore

$$\frac{(2i+1)\pi}{4n} = \frac{(2j+1)\pi}{4n} \qquad \Leftrightarrow \qquad i = j.$$

Conclusion, par contraposée

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![0; n-1]\!]^2, \qquad (i \neq j) \ \Rightarrow\ (r_i \neq r_j).}$$

14. Par les questions précédentes, on sait que pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, r_k est une racine de P_n et ces racines sont toutes distinctes deux à deux. Donc P_n possède n racines distinctes. Or par la question 2., $\deg(P_n) = n$. Donc P_n possède exactement n racines et pas plus. Conclusion,

$$\boxed{P_n \text{ ne possède pas d'autres racines que les } r_k,\ k \in [\![0; n-1]\!].}$$

De plus son coefficient dominant vaut 1 donc sa factorisation est donné par

$$\boxed{P_n = \prod_{k=0}^{n-1}(X - r_k) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X + \cos^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)\right).}$$

15. Par une relation racines-coefficients, (ou en évaluant en 0) on a

$$\prod_{k=0}^{n-1} r_k = (-1)^n P_n(0).$$

Donc par la question 4.,

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n-1} r_k = (-1)^n P_n(0) = (-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}.}$$

Partie 4 : ...bref tout Rolleait pour eux !

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On note $\tilde{P_n}$ la fonction polynomiale associée à P_n.

16. (a) Procédons par l'absurde et supposons que $\tilde{P_n}$ change de signe sur $\mathbb{R}_+$. Alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ $\alpha \neq \beta$ tel que $\tilde{P_n}(\alpha)$ et $\tilde{P_n}(\beta)$ soient de signes contraires. Or $\tilde{P_n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction polynomiale. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]\alpha; \beta[\subseteq \mathbb{R}_+^*$ (ou $]\beta; \alpha[$) tel que $\tilde{P_n}(c) = 0$. Donc c est une racine de P_n, il existe $k \in [\![0; n-1]\!]$ tel que $c = r_k$. Donc

$$c = r_k = h(\theta_k) \in h\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) \subseteq [-1; 0] \qquad \text{d'après 12.}$$

Or $c \in]\alpha; \beta[\subseteq \mathbb{R}_+^*$. Contradiction. Conclusion,

$$\boxed{\tilde{P_n} \text{ est de signe constant sur } \mathbb{R}_+.}$$

(b) Par la question 4., $P_n(0) = u_n = \frac{1}{2^{2n-1}} > 0$. Comme $\tilde{P_n}$ est de signe constant sur $\mathbb{R}_+$ on en déduit que

$$\boxed{\tilde{P_n} \text{ est strictement positive sur } \mathbb{R}_+.}$$

17. On suppose $n \geqslant 2$. La fonction $\tilde{P_n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. Pour tout $k \in [\![0; n-2]\!]$, on remarque que $\theta_k < \theta_{k+1}$ et donc par la stricte croissance de h, on a $r_k = h(\theta_k) < h(\theta_{k+1}) = r_{k+1}$. La fonction $\tilde{P_n}$ est continue sur $[r_k; r_{k+1}]$, dérivable sur $]r_k : r_{k+1}[$ et $\tilde{P_n}(r_k) = \tilde{P_n}(r_{k+1})$. Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c_k \in]r_k : r_{k+1}[$ tel que $\tilde{P_n}'(c_k) = 0$. Donc c_k est une racine de $\tilde{P_n}'$. Or on a déjà vu que pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $r_k = h(\theta_k) \in h\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) \subseteq [-1; 0]$ et on a

$$-1 \leqslant r_0 < c_0 < r_1 < c_1 < r_2 < \cdots < c_{n-1} < r_{n-1} \leqslant 0.$$

En particulier les c_k sont tous distincts et dans $[-1; 0]$. Conclusion,

$$\boxed{\tilde{P_n}' \text{ admet } n-1 \text{ racines distinctes dans } [-1; 0].}$$

Problème III - Espace Vectoriel

Pour E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, on pose $F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = 0_{\mathbb{R}}\}$.

Partie 1 : La base, c'est s'adapter.

On suppose dans cette partie que $E = \mathbb{R}_4[X]$ et on pose $\mathscr{B} = \left(1, X, X(X-1), X^2(X-1), X^3(X-1)\right)$.

1. Par le cours, on sait que

$$\boxed{\mathscr{B}_{can} = \left(1, X, X^2, X^3, X4\right) \text{ est la base canonique de } E = \mathbb{R}_4[X].}$$

2. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E. On a

- $F \subseteq E$ par définition.
- Si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$, alors en particulier, $P(0) = P(1) = 0_{\mathbb{R}}$. Donc $0_{\mathbb{R}[X]} \in F$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in F^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Puisque $P \in F$, on a $P(0) = P(1) = 0$. De même $Q \in F$ donc $Q(0) = Q(1) = 0$. Ainsi,

$$R(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad R(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = 0.$$

  Donc $R \in F$ et F est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion,

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

3. *Méthode 1.* Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_4 X^4 \in \mathbb{R}_4[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& P \in \operatorname{Vect}(\mathscr{B}) \\
\Leftrightarrow \quad & \exists (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5,\ P = x + yX + zX(X-1) + tX^2(X-1) + uX^3(X-1) \\
\Leftrightarrow \quad & \exists (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5,\ P = x + (y-z)X + (z-t)X^2 + (t-u)X^3 + uX^4 \\
\Leftrightarrow \quad & \exists (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5,\ \begin{cases} a_0 = x \\ a_1 = y - z \\ a_2 = z - t \\ a_3 = t - u \\ a_4 = u \end{cases} \qquad \text{par unicité des coefficients d'un polynôme} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5,\ \begin{cases} x = a_0 \\ y = a_1 + z = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ z = a_2 + t = a_2 + a_3 + a_4 \\ t = a_3 + u = a_3 + a_4 \\ u = a_4 \end{cases} \qquad \text{l'existence est toujours vraie.}
\end{aligned}$$

Donc pour tout $P \in \mathbb{R}_4[X]$, $P \in \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$ et donc $\mathbb{R}_4[X] \subseteq \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$ et réciproquement puisque la famille $\mathscr{B}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}_4[X]$, on a $\operatorname{Vect}(\mathscr{B}) \subseteq \mathbb{R}_4[X]$. Donc

$$\operatorname{Vect}(\mathscr{B}) = \mathbb{R}_4[X].$$

Méthode 2. Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. On a donc les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Vect}(\mathscr{B}) &= \operatorname{Vect}\left(1, X, X(X-1), X^2(X-1), X^3(X-1)\right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(1, X, X^2 - X, X^3 - X^2, X^4 - X^3\right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(1, X, X^2, X^3 - X^2, X^4 - X^3\right) && C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \\
&= \operatorname{Vect}\left(1, X, X^2, X^3, X^4 - X^3\right) && C_4 \leftarrow C_4 + C_3 \\
&= \operatorname{Vect}\left(1, X, X^2, X^3, X^4\right) && C_5 \leftarrow C_5 + C_4 \\
&= \mathbb{R}_4[X] \qquad \text{car on reconnait la base canonique de } \mathbb{R}_4[X].
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est génératrice de } E.}$$

4. Montrons que $\mathscr{B}$ est une base de E. On sait déjà par la question précédente que $\mathscr{B}$ est génératrice dans E. De plus, $\mathscr{B}$ est une famille de polynômes de degrés distincts. Donc $\mathscr{B}$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } E.}$$

5. Soit $\mathscr{B}_F = \left(X(X-1), X^2(X-1), X^3(X-1)\right)$. On observe les points suivants :
   - $\mathscr{B}_F$ est une sous-famille de $\mathscr{B}$. Or $\mathscr{B}$ est libre, donc $\mathscr{B}_F$ est libre.
   - Montrons que $\mathscr{B}_F$ engendre F i.e. $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}_F) = F$. Soit $P \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} P \in F & \Leftrightarrow & F(0) = F(1) = 0 \\ & \Leftrightarrow & 0 \text{ et } 1 \text{ sont des racines distinctes de } P \\ & \Leftrightarrow & X(X-1) \text{ divise } P \\ & \Leftrightarrow & \exists Q \in \mathbb{R}[X], \quad P = X(X-1)Q. \end{array}$$

   Or $\deg(P) \leqslant 4$ donc $\deg(Q) \leqslant 2$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} P \in F & \Leftrightarrow & \exists Q \in \mathbb{R}_2[X], \quad P = X(X-1)Q \\ & \Leftrightarrow & \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad P = X(X-1)\left(aX^2 + bX + c\right) \\ & \Leftrightarrow & \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad P = aX^3(X-1) + bX^2(X-1) + cX(X-1) \\ & \Leftrightarrow & P \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_F). \end{array}$$

   Donc on a bien $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_F)$ et $\mathscr{B}_F$ est génératrice dans F.

   Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_F \text{ est une base de } F.}$$

6. Posons $\mathscr{B}_1 = (1, X)$. On sait que $\mathscr{B}_1$ est la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$. On a donc les points suivants :
   - $\mathscr{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$,
   - $\mathscr{B}_F$ est une base de F,
   - de plus, $(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_F) = \mathscr{B}$, donc est une base de E.

   Conclusion, par le théorème de la base adaptée,

$$\boxed{\mathbb{R}_1[X] \oplus F = E.}$$

Partie 2 : La division unifie le tout !

Pour E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, on pose $F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = 0_{\mathbb{R}}\}$.

7. Montrons que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont en somme directe. Montrons que $F \cap \mathbb{R}_1[X] = \{0_E\}$. Soit $P \in F \cap \mathbb{R}_1[X]$. Alors, $P \in \mathbb{R}_1[X]$ i.e. $\deg(P) \leqslant 1$. Or $P \in F$ donc 0 et 1 sont racines de P. Donc P admet deux racines distincts ce qui est davantage que son degré donc nécessairement $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Ainsi,

$$F \cap \mathbb{R}_1[X] \subseteq \{0_E\}.$$

   Réciproquement, F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont des sous-espaces vectoriels de E donc $0_E \in F$ et $0_E \in \mathbb{R}_1[X]$ et donc $\{0_E\} \subseteq F \cap \mathbb{R}_1[X]$. D'où

$$F \cap \mathbb{R}_1[X] = \{0_E\}.$$

   Conclusion,

$$\boxed{F \text{ et } \mathbb{R}_1[X] \text{ sont en somme directe.}}$$

8. Soit $P \in E$. Par le théorème de la division euclidienne, il existe $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que

$$P = X(X-1)Q + R \qquad \text{et} \qquad \deg(R) < \deg(X(X-1)) = 2.$$

Donc $\deg(R) \leqslant 1$ i.e. $R \in \mathbb{R}_1[X]$. Donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R = aX + b$. En évaluant en 0 et 1, on a

$$\begin{cases} P(0) = 0 + R(0) = b \\ P(1) = 0 + R(1) = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = P(0) \\ a = P(1) - b = P(1) - P(0) \end{cases}$$

Conclusion, le reste R de la division euclidienne de P par $X(X-1)$ est donné par

$$\boxed{R = (P(1) - P(0))X + P(0).}$$

9. Montrons que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$. Il nous don démontrer les deux points suivants :

   (i) F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont en somme directe,

   (ii) $F + \mathbb{R}_1[X] = E$.

   Le point (i) est vrai par la question 7. Montrons le point (ii). Puisque F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont des sous-espaces vectoriels de E, on a $F + \mathbb{R}_1[X] \subseteq E$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Par la question précédente, il existe $(Q, R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_1[X]$ tel que

$$P = X(X-1)Q + R.$$

   Posons $P_F = X(X-1)Q$ et $P_1 = R$. Alors,

   - $P_F(0) = P_F(1) = 0$. Donc $P_F \in F$,
   - $P_1 = R \in \mathbb{R}_1[X]$ d'après la question précédente,
   - $P_F + P_1 = P$.

   D'où, $P \in F + \mathbb{R}_1[X]$. Ceci étant vrai pour $P \in \mathbb{R}[X]$ quelconque, on en déduit que

$$E \subseteq F + \mathbb{R}_1[X].$$

   Donc

$$E = F + \mathbb{R}_1[X].$$

   Conclusion, par (i) et (ii), on en déduit que

$$\boxed{F \text{ et } \mathbb{R}_1[X] \text{ sont supplémentaires dans } E \text{ i.e. } F \oplus \mathbb{R}_1[X] = E.}$$

   NB1 : ce résultat généralise celui de la partie précédente car nous l'avons fait dans $\mathbb{R}[X]$ mais on peut appliquer exactement le même raisonnement dans $\mathbb{R}_n[X]$.

   NB2 : le théorème de la division euclidienne garantissant également l'unicité, il était possible de l'utiliser aussi pour montrer que F et $\mathbb{R}_1[X]$ étaient en somme directe en revenant à la définition du caractère directe (et non la propriété avec l'intersection).

Problème IV - Séries numériques

On fixe dans tout ce problème $N \in \mathbb{N}^*$. Dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère pour tout $p \in [\![0; N]\!]$,

$$\begin{aligned} f_p : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^p \, \mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Partie 1 : Riemann part se promener en pleine nature...

1. Si $p = 0$, alors $f_0 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \end{array}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_0(n) = \mathrm{e}^{-n}$ et on reconnait le terme général d'une série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-1} \in \,]-1;1[$. Donc $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} f_0(n) \text{ converge}}$ et sa somme totale est donnée par
$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} f_0(k) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.}$$

2. Soit $p \in [\![0;N]\!]$. On observe que
$$n^2 f_p(n) = n^2 n^p \,\mathrm{e}^{-n} = n^{p+2}\,\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{par croissance comparée.}$$
Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\forall n \geq n_0, \quad n^2 f_p(n) \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad f_p(n) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_p(n) \geqslant 0$. Ainsi,
$$\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant f_p(n) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,
$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} f_p(n) \text{ converge.}}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $n + x \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, par élévation à la puissance p (qui est fixée !) on en déduit que
$$f_p(n+x) = (n+x)^p\,\mathrm{e}^{-(n+x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^p\,\mathrm{e}^{-n-x} = \mathrm{e}^{-x} f_p(n).$$
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_p(n) = n^p\,\mathrm{e}^{-n} \geqslant 0$ et donc $\mathrm{e}^{-x} f_p(n) \geqslant 0$. D'après la question précédente, $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_p(n)$ converge et donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{-x} f_p(n)$ également. Conclusion, par le théorème des équivalents des séries à termes positifs,
$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} f_p(n+x) \text{ converge.}}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$f_p\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}}{n^p}$$
Or $\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ i.e. $\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$. Donc
$$f_p\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^p}.$$
De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^p} > 0$. Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs, les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_p\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^p}$ sont de même nature.

- Premier cas, si $p \in \{0;1\}$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^p}$ diverge en tant que série de Riemann d'exposant $p \leqslant 1$. Dans ce cas, $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_p\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.
- Second cas, si $p \geqslant 2$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^p}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $p > 1$ et dans ce cas, $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_p\left(\frac{1}{n}\right)$ converge.

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_p\left(\frac{1}{n}\right) \quad \begin{cases} \text{diverge si } p \in \{0;1\} \\ \text{converge si } p \geqslant 2. \end{cases}}$$

Partie 2 : ...la géométrique le suit pour ne pas être en reste...

On suppose $p = 1$.

5. Soit $m \in \mathbb{N}$. Par le glissement d'indice $\tilde{k} = k+1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} f_1(k) &= \sum_{k=0}^{m} k\,\mathrm{e}^{-k} \\
&= \sum_{\tilde{k}=1}^{m+1} (k-1)\,\mathrm{e}^{-(k-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} k\,\mathrm{e}^{-k}\,\mathrm{e} - \sum_{k=1}^{m+1} \mathrm{e}^{-(k-1)} \\
&= \mathrm{e}\left((m+1)\,\mathrm{e}^{-m-1} + \sum_{k=0}^{m} f_1(k) - 0\right) - \sum_{k=0}^{m} \mathrm{e}^{-k}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=0}^{m} f_1(k) - \mathrm{e}\sum_{k=0}^{m} f_1(k) = (m+1)\,\mathrm{e}^{-m} - \sum_{k=0}^{m} \mathrm{e}^{-k} \qquad \Leftrightarrow \qquad (1-\mathrm{e})\sum_{k=0}^{m} f_1(k) = (m+1)\,\mathrm{e}^{-m} - \sum_{k=0}^{m} \mathrm{e}^{-k}.$$

Or $\sum_{k=0}^{m} \mathrm{e}^{-k}$ est une somme géométrique de raison $\mathrm{e}^{-1} \neq 1$ donc $\sum_{k=0}^{m} \mathrm{e}^{-k} = \frac{1-\mathrm{e}^{-(m+1)}}{1-\mathrm{e}^{-1}}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} f_1(k) &= \frac{-1}{\mathrm{e}-1}\left((m+1)\,\mathrm{e}^{-m} - \frac{1-\mathrm{e}^{-(m+1)}}{1-\mathrm{e}^{-1}}\right) \\
&= \frac{1-\mathrm{e}^{-(m+1)}}{(\mathrm{e}-1)\,(1-\mathrm{e}^{-1})} - \frac{(m+1)\,\mathrm{e}^{-m}}{\mathrm{e}-1}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{m} f_1(k) = \mathrm{e}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-(m+1)}}{(\mathrm{e}-1)^2} - \frac{(m+1)\,\mathrm{e}^{-m}}{\mathrm{e}-1}.}$$

6. Par croissance comparée $\lim_{m\to+\infty} (m+1)\,\mathrm{e}^{-m} = 0$ et on a également $\lim_{m\to+\infty} \mathrm{e}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-(m+1)}}{(\mathrm{e}-1)^2} = \frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_1(n)$ converge et par passage à la limite dans la question précédente quand $m \to +\infty$, on en déduit directement que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} f_1(k) = \frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}.}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_1(n)$ converge, $\boxed{\text{son reste d'ordre } n \text{ est bien défini}}$ de plus,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_1(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_1(k) - \sum_{k=0}^{n} f_1(k).$$

Donc par les deux questions précédentes, on en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_1(k) &= \frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2} - \mathrm{e}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-(n+1)}}{(\mathrm{e}-1)^2} + \frac{(n+1)\,\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}-1}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-n}}{(\mathrm{e}-1)^2} + \frac{(n+1)\,\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}-1}\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_1(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\,\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}-1}.}$$

Partie 3 : ...heureusement les intégrales viennent encadrer tout ça.

On suppose $p = 2$.

8. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$. Posons

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \begin{cases} u(t) = -\,\mathrm{e}^{-t} \\ v(t) = t^2. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^{-t} \\ v'(t) = 2t. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$\int_a^b t^2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^2\,\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \left(-\,\mathrm{e}^{-t}\,2t\right)\mathrm{d}t = a^2\,\mathrm{e}^{-a} - b^2\,\mathrm{e}^{-b} + \int_a^b 2t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On repose alors $\forall t \geqslant 0$, $u(t) = -\,\mathrm{e}^{-t}$ et $v(t) = 2t$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ et pour tout $t \geqslant 0$,

$$\int_a^b 2t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-2t\,\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b -2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2a\,\mathrm{e}^{-a} - 2b\,\mathrm{e}^{b} - \left[2\,\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=a}^{t=b} = 2a\,\mathrm{e}^{-a} - 2b\,\mathrm{e}^{b} - 2\,\mathrm{e}^{-b} + 2\,\mathrm{e}^{-a}.$$

Ainsi,

$$\int_a^b t^2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = a^2\,\mathrm{e}^{-a} - b^2\,\mathrm{e}^{-b} + 2a\,\mathrm{e}^{-a} - 2b\,\mathrm{e}^{b} - 2\,\mathrm{e}^{-b} + 2\,\mathrm{e}^{-a}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\int_a^b t^2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left(a^2+2a+2\right)\mathrm{e}^{-a} - \left(b^2+2b+2\right)\mathrm{e}^{-b}.}$$

9. Pour tout $t \geqslant 0$, on a $f_2(t) = t^2\,\mathrm{e}^{-t}$. La fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \geqslant 0$,

$$f_2'(t) = 2t\,\mathrm{e}^{-t} - t^2\,\mathrm{e}^{-t} = (2-t)\,t\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Par conséquent, pour $t \in \mathbb{R}_+$, on a $f_2'(t) > 0 \;\Leftrightarrow\; 2-t \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; t \leqslant 2$. De plus, $f_2(0) = 0$, $f_2(2) = 4\,\mathrm{e}^{-2}$ et enfin par croissance comparée

$$\lim_{t\to+\infty} f_2(t) = 0.$$

Conclusion,

t	0		2		$+\infty$
f_2	0	$\nearrow$	$4\,\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	0

10. Soit $n \geqslant 2$ et $m \geqslant n+1$. Soit $k \in [\![n+1;m]\!]$, alors $[k-1;k] \subseteq [2;+\infty[$. Donc f_2 est décroissante sur $[k-1;k]$ et donc pour tout $t \in [k-1;k]$, on a

$$f_2(t) \geqslant f_2(k).$$

Donc en intégrant entre $k-1$ et k et par croissance de l'intégrale,

$$\int_{k-1}^{k} f_2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{k-1}^{k} f_2(k)\,\mathrm{d}t = f_2(k).$$

De même, f_2 est décroissante sur $[k;k+1]$ et donc $\forall t \in [k;k+1]$, $f_2(t) \leqslant f_2(k)$. Ainsi,

$$\int_{k}^{k+1} f_2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f_2(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

En sommant pour k entre $n+1$ et m, on obtient que

$$\int_{n+1}^{m+1} f_2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} f_2(k) \leqslant \int_{n}^{m} f_2(t)\,\mathrm{d}t$$

Donc d'après la question 8., en posant pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) = \left(x^2+2x+2\right)\mathrm{e}^{-x}$, on obtient que

$$\boxed{g(n+1) - g(m+1) \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} f_2(k) \leqslant g(n) - g(m).}$$

11. Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_2(n)$ converge d'après la question 2., on en déduit que R_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par croissance comparée,

$$\lim_{m\to+\infty} g(m) = \lim_{m\to+\infty} \left(m^2+2m+2\right)\mathrm{e}^{-m} = 0.$$

Donc par passage à la limite dans l'inégalité de la question précédente, on obtient que

$$g(n+1) \leqslant R_n \leqslant g(n).$$

D'une part, on a donc

$$R_n \leqslant \left(n^2+2n+2\right)\mathrm{e}^{-n} \leqslant n^2\,\mathrm{e}^{-n}.$$

Donc en prenant $A = 1$ (indépendant de n), on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad R_n \leqslant An^2\,\mathrm{e}^{-n}.$$

D'autre part,

$$\left((n+1)^2+2(n+1)+2\right)\mathrm{e}^{-n-1} = \left(n^2+4n+5\right)\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-1}\,n^2\,\mathrm{e}^{-n}.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n+1)}{n^2\,\mathrm{e}^{-n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1}\,n^2\,\mathrm{e}^{-n}}{n^2\,\mathrm{e}^{-n}} = \mathrm{e}^{-1}.$$

Donc en prenant $\varepsilon = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\mathrm{e}^{-1} - \varepsilon \leqslant \frac{g(n+1)}{n^2\,\mathrm{e}^{-n}} \leqslant \mathrm{e}^{-1} + \varepsilon\,.$$

Donc

$$\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2} \leqslant \frac{g(n+1)}{n^2\,\mathrm{e}^{-n}}.$$

Ainsi, en prenant $a = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2} > 0$, on en déduit bien que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$an^2\,\mathrm{e}^{-n} \leqslant g(n+1) \leqslant R_n.$$

Conclusion, pour $a = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2} > 0$ et $A = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\boxed{an^2\,\mathrm{e}^{-n} \leqslant R_n \leqslant An^2\,\mathrm{e}^{-n}\,.}$$