Devoir Maison 8
Séries, espaces vectoriels, dimension

A faire pour le jeudi 28 mars

Problème I - Séries

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad \gamma_n = H_n - \ln(n)\,.$$

Partie 1 : Alors l'Harmonie s'étendra jusqu'à l'infini

1. Déterminer un équivalent simple de $\gamma_{n+1} - \gamma_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)$.
3. En déduire que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On notera γ sa limite.
4. Montrer alors que
$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Partie 2 : Quand le discret pour continuer sur l'ordre suivant se fait discrètement aider par le continu

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right).$$

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = H_n - \ln(n+1)$.
6. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \gamma$.
7. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
8. Soit $(a,b) \in]0;+\infty[^2$. Calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $N \geqslant n$,
$$(N+2)\ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right) - (n+2)\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} u_k \leqslant (N+1)\ln\left(\frac{N}{N+1}\right) - (n+1)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, R_n le reste d'ordre n de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_k$.

10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$(n+2)\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - 1 \leqslant R_n \leqslant (n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1.$$
11. En déduire que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.
12. Conclure à l'aide des questions précédentes que
$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Problème II - Espaces vectoriels et dimension

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble

$$\mathscr{E}_n = \left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; M^T M = M M^T \right\}.$$

Partie 1 : L'identité d'une diagonale est d'être symétrique

1. Démontrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

   On admettra de même que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

2. Démontrer que $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Partie 2 : Les antisymétriques ripostent et proposent une coalition

On suppose dans toute cette partie que $n = 2$.

3. Pour chacun des ensembles suivants, déterminer une base de l'espace en question et en déduire la dimension :

   (a) $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ (b) $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ (c) $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$.

4. Montrer que $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

5. Montrer que $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ sont en somme directe. Sont-ils supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

On pose

$$\mathscr{A}_2^+(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{l} 3a - 2b - 2c - 3d = 0 \\ 4a + 3b + 3c - 4d = 0 \end{array} \right\}.$$

On admet que $\mathscr{A}_2^+(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

6. Déterminer une base de $\mathscr{A}_2^+(\mathbb{R})$ et en déduire une écriture de $\mathscr{A}_2^+(\mathbb{R})$ en fonction de $\mathrm{Vect}(I_2)$ et $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$.

7. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que

   $$M \in \mathscr{E}_2 \quad \Leftrightarrow \quad (b = c) \quad \text{OU} \quad (b = -c \text{ et } a = d).$$

   (b) En déduire que $\mathscr{E}_2$ est l'union de deux espaces vectoriels que l'on précisera.

8. On pose

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que $A + B$ n'est pas un élément de $\mathscr{E}_2$.

   (b) Justifier proprement que $\mathscr{E}_2$ n'est pas un espace vectoriel.

Partie 3 : Pour qui sont ces S qui commutent sur nos têtes ?

On suppose dans toute cette partie que $n = 3$ et on pose

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Calculer S^2 et S^3.

10. On pose $\mathscr{F} = \left(I_3, S, S^2, S^3, S^4, S^5, S^6\right)$.
    (a) Déterminer le rang de $\mathscr{F}$.
    (b) La famille $\mathscr{F}$ est-elle libre ? génératrice dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
11. On pose $F = \text{Vect}(\mathscr{F})$. Déterminer une base de F et préciser sa dimension.
12. Montrer que F est stable par produit i.e. pour tout $(A, B) \in F^2$, $AB \in F$.
13. Vérifier que $S \in \mathscr{E}_3$ et que $S^2 \in \mathscr{E}_3$.
14. On note
$$\mathcal{C}(S) = \{ M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid SM = MS \}.$$
    (a) Justifier que $\mathcal{C}(S)$ est un espace vectoriel.
    (b) Montrer que $F \subseteq \mathcal{C}(S)$.
    (c) Soit $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que si $M \in \mathcal{C}(S)$ alors $M \in F$. Que peut-on en conclure ?

Partie 4 : Vers l'infini et au-delà !

On se place dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour tout fonction $f \in E$, on note
$$f^T : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(-x) \end{array}$$

On considère les ensembles suivants :

- $\mathscr{E} = \left\{ f \in E \;\middle|\; f^T \circ f = f \circ f^T \right\}$.
- $\mathscr{S} = \left\{ f \in E \;\middle|\; f^T = f \right\}$ l'ensemble des fonctions paires.
- $\mathscr{A} = \left\{ f \in E \;\middle|\; f^T = -f \right\}$ l'ensemble des fonctions impaires.
- $\mathscr{D} = \text{Vect}(\text{Id})$.
- $\mathscr{H} = \{ f \in E \mid f(1) = 0 \}$

15. Montrer que $\mathscr{H}$ est un espace vectoriel.
    On admettra dans la suite que $\mathscr{S}$, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{D}$ le sont également.
16. Montrer que $\mathscr{H} \oplus \mathscr{D} = E$.
17. Montrer que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{D}$ sont en somme directe.

On pose $\mathscr{A}^- = \mathscr{A} \cap \mathscr{H}$ et $\mathscr{S}^+ = \mathscr{S} \oplus \mathscr{D}$.

18. (a) Soit $f \in E$. Vérifier que $g = \frac{f - f^T}{2} - \frac{f(1) - f^T(1)}{2}\text{Id} \in \mathscr{A}^-$.
    (b) En déduire que $E = \mathscr{A}^- + \mathscr{S}^+$.
    (c) Montrer que $\mathscr{A}^-$ et $\mathscr{S}^+$ sont supplémentaires dans E.

On admet/rappelle que $\mathscr{A} \oplus \mathscr{S} = E$ (voir le chapitre 1, exemple 29, question 2)

19. Montrer que $\mathscr{A} \bigcup \mathscr{S} \subseteq \mathscr{E}$.
20. Soit $f_0 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array}$. Montrer que $f_0 \notin \mathscr{E}$.
21. En déduire que $\mathscr{E}$ n'est pas un espace vectoriel.