Correction du Devoir Maison 9
Dénombrement, applications linéaires, intégration

Du mardi 30 avril

Problème I - Dénombrement

Le perroquet du capitaine Haddock possède un nombre limité de mots dans son vocabulaire que l'on range en deux catégories : n mots de la vie courante tels que

« dring » « allô » « caramba »

et m mots du capitaine telles que

« mille-sabords » « tonnerre » « boit-sans-soif »
« ectoplasme » « moule-à-gauffre » « bachi-bouzouk »

On suppose que chaque phrase du perroquet contient p mots (éventuellement plusieurs fois le même) avec $2 \leqslant p \leqslant m+n-1$.

1. Construire une phrase du perroquet revient à faire un tirage successif, avec remise, de p mots parmi les $n+m$ mots possibles de son vocabulaire (qu'ils soient de la vie courante ou du capitaine). Autrement on construit un p-uplet d'éléments d'un ensemble de cardinal n. Conclusion,

$$\boxed{\text{le perroquet peut prononcer } (n+m)^p \text{ phrases différentes.}}$$

2. Pour que les p mots soient différents, il faut et il suffit de faire un tirage successif sans remise de p mots parmi les $n+m$ de son vocabulaire. Il s'agit d'un arrangement :

$$\boxed{\text{Il y a donc } A_{n+m}^p = \frac{(n+m)!}{(n+m-p)!} \text{ phrases avec } p \text{ mots différents.}}$$

3. *Méthode 1.* Pour construire une phrase de p mots dont exactement $p-1$ sont différents, il faut exactement deux mots identiques dans la phrase. On choisit le mot qui sera répété, on en prend donc 1 parmi les $n+m$: $n+m$ choix possibles ($\binom{n+m}{1}$ ou A_{n+m}^1 ou $(n+m)^1$). Ensuite, il nous faut placer ces deux mots dans la phrase, on choisit donc deux places parmi les p possibles. Attention puisque les deux mots ainsi placés sont identiques l'ordre de l'un par rapport à l'autre ne compte pas. Donc le choix des deux places est un tirage simultané : $\binom{p}{2}$ choix. Ensuite, on choisit les $p-2$ autres mots tous distincts parmi les $n+m-1$ mots restant que l'on range dans les $p-2$ places restantes. Cela constitue donc un arrangement de $p-2$ parmi $n+m-1$: A_{n+m-1}^{p-2} (ou de façon équivalente d'une combinaison de $p-2$ parmi $n+m-1$ pour le tirage des mots puis d'une permutation de ces $p-2$ mots : $\binom{n+m-1}{p-2} \times (p-2)!$). On obtient alors au total

$$(n+m) \times \binom{p}{2} \times A_{n+m-1}^{p-2} = (n+m) \times \frac{p!}{2!\,(p-2)!} \frac{(n+m-1)!}{(n+m-1-p+2)!} = \frac{p\,(p-1)}{2} \frac{(n+m)!}{(n+m-p+1)!}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Il y a } \frac{p\,(p-1)}{2} \frac{(n+m)!}{(n+m-p+1)!} \text{ phrases avec exactement } p-1 \text{ mots distincts.}}$$

Méthode 2. On choisit les $p-1$ mots qui constitueront notre phrases : $\binom{n+m}{p-1}$ choix possibles. Parmi ces $p-1$ mots, on en choisit un qui sera répété une seconde fois : $p-1$ choix possibles. On choisit les places de nos deux mots identiques : $\binom{p}{2}$ choix possibles puis l'on range les autres mots dans les dernières places disponibles $A_{p-2}^{p-2} = (p-2)!$ choix. Au total, on retrouve

$$\begin{aligned}\binom{n+m}{p-1} \times (p-1) \times \binom{p}{2} \times (p-2)! &= \frac{(n+m)!}{(p-1)!\,(n+m-p+1)!} \times (p-1) \times \frac{p!}{2!\,(p-2)!} \times (p-2)! \\ &= \frac{(n+m)!}{(n+m-p+1)!} \frac{p\,(p-1)}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Il y a } \frac{p\,(p-1)}{2} \frac{(n+m)!}{(n+m-p+1)!} \text{ phrases avec exactement } p-1 \text{ mots distincts.}}$$

4. Soit A l'ensemble des phrases avec au plus $p-2$ mots différents. Notons A_p, respectivement A_{p-1}. l'ensemble des phrases avec exactement p, respectivement $p-1$, mots différents. On observe que

$$\overline{A} = A_p \sqcup A_{p-1}.$$

Donc, en notant E l'ensemble de toutes les phrases du perroquet, on a

$$\begin{aligned}\text{Card}\,(A) &= \text{Card}\,(E) - \text{Card}\,\left(\overline{A}\right) \\ &= \text{Card}\,(E) - \text{Card}\,(A_p) - \text{Card}\,(A_{p-1}) \qquad \text{car l'union est disjointe} \\ &= (n+m)^p - \frac{(n+m)!}{(n+m-p)!} - \frac{p\,(p-1)}{2} \frac{(n+m)!}{(n+m-p+1)!} \\ &= (n+m)^p - \frac{(n+m)!}{(n+m-p)!} \left(1 - \frac{p\,(p-1)}{2\,(n+m-p+1)}\right).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Card}\,(A) = (n+m)^p - \frac{(n+m)!}{(n+m-p)!} \left(1 - \frac{p\,(p-1)}{2\,(n+m-p+1)}\right).}$$

5. Notons B l'ensemble des phrases avec au moins un mot de la vie courante et au moins un mot du capitaine Haddock. Alors $\overline{B}$ est l'ensemble des phrases avec aucun mot de la vie courante ou aucun mot du capitaine. Notons B_1 l'ensemble des phrases avec uniquement des mots de la vie courante et B_2 l'ensemble des phrases avec uniquement des mots du capitaine. On a

$$\overline{B} = B_1 \sqcup B_2.$$

Or pour construire un élément de B_1, il suffit de tirer successivement avec remise p mots dans l'ensemble des n mots de la vie courante :

$$\text{Card}\,(B_1) = n^p.$$

De même $\text{Card}\,(B_2) = m^p$. D'où,

$$\begin{aligned}\text{Card}\,(B) &= \text{Card}\,(E) - \text{Card}\,\left(\overline{B}\right) \\ &= \text{Card}\,(E) - \text{Card}\,(B_1) - \text{Card}\,(B_2) \qquad \text{car l'union est disjointe} \\ &= (n+m)^p - n^p - m^p.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Card}\,(B) = (n+m)^p - n^p - m^p.}$$

6. Soit $k \in [\![0;p]\!]$. On choisit les k places des mots de la vie courante : $\binom{p}{k}$ choix. Ensuite, on place successivement et avec remise k mots de la vie courante parmi les n possibles dans ces k places prévues : n^k choix. Enfin, sur leurs places, on tire successivement et avec remise les $n-k$ mots du capitaine parmi les m possibles : m^{n-k}. Au total :

$$\boxed{\binom{p}{k} n^k m^{n-k} \text{ phrases avec } k \text{ mots de la vie courante et } p-k \text{ mots du capitaine Haddock.}}$$

On suppose dans la suite que $m = 1$: le perroquet n'utilise qu'une seule expression du capitaine, « mille-sabords », et que toutes les autres expressions proviennent de la vie courante.

7. Soit $k \in [\![0;p]\!]$. On choisit les k places occupées par le mot « mille-sabords » parmi les p possibles. Le tirage est simultané car l'ordre ne compte pas (on place le même mot). Donc $\binom{p}{k}$ choix possibles. Puis on construit une phrase de $p-k$ mots parmi les n mots de la vie courante. Cela constitue un tirage successif, avec remise de $p-k$ mots parmi les n de la vie courante : n^{p-k} choix. Au total :

$$\boxed{\binom{p}{k} n^{p-k} \text{ phrases avec exactement } k \text{ apparitions du mot « mille-sabords ».}}$$

8. Notons C l'ensemble des phrases du perroquet n'utilisant que le mot « mille-sabords » et les mots de la vie courante. Notons pour tout $k \in [\![0;p]\!]$, C_k l'ensemble des phrases contenant exactement k apparition du mot « mille-sabords ». On observe que

$$C = \bigsqcup_{k \in [\![0;p]\!]} C_k.$$

(les C_k forment une partition de C). Puisque l'union est disjointe, on obtient

$$\mathrm{Card}\,(C) = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{Card}\,(C_k)\,.$$

Or par la question précédente, pour tout $k \in [\![0;p]\!]$, $\mathrm{Card}\,(C_k) = \binom{p}{k} n^{p-k}$. De plus, pour construire une phrase avec « mille-sabords » et des mots de la vie courante, il suffit de tirer successivement et avec remise p mots parmi l'ensemble des mots de la vie courante auquel on a adjoint « mille-sabords » donc un ensemble à $n+1$ éléments. On construit donc un p-uplet dans un ensemble de cardinal n :

$$\mathrm{Card}\,(C) = (n+1)^p\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{(n+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^{p-k}.}$$

Vérification, on reconnait un binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} n^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 1^k n^{p-k} = (1+n)^p\,.$$

Donc on retrouve bien ce résultat par un calcul direct :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^{p-k} = (n+1)^p\,.}$$

Il est fort ce perroquet.

Problème II - Algèbre linéaire

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie. On considère $u \in \mathscr{L}(E,F)$, et $v \in \mathscr{L}(E,G)$. Le but de ce problème est de démontrer l'équivalence suivante :

$$\operatorname{Ker}(u) \subseteq \operatorname{Ker}(v) \quad \Leftrightarrow \quad \exists w \in \mathscr{L}(F,G), \quad v = w \circ u.$$

Partie 1 : L'attaque des morphismes aplatisseurs !

On confond dans cette partie $\mathbb{R}^3$ avec $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^2$ avec $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Posons pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, on pose $u(X) = AX$ et $v(X) = BX$.

1.
   - Soit $X = \mathbb{R}^3 = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Puisque $A \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ alors AX existe et $AX \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$. Donc u est bien définie sur $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(X,Y) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2$. On a les égalités entre vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

   $$u(\lambda X + \mu Y) = A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY = \lambda u(X) + \mu u(Y).$$

   Donc u est linéaire.

   Conclusion,

   $$\boxed{u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right).}$$

   On admet que $v \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right)$.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
X \in \operatorname{Ker}(u) \quad & \Leftrightarrow \quad u(X) = 0_{\mathbb{R}^2} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y - z \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2y - z = 2z - z = z \\ y = z \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad u = \begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right).}$$

Posons $\mathscr{B}_1 = \left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$. Alors $\mathscr{B}_1$ engendre $\operatorname{Ker}(u)$. De plus, $\mathscr{B}_1$ est libre car composée d'un seul vecteur non nul. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_1 = \left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(u).}$$

3. Par la question précédente, $\dim(\operatorname{Ker}(u)) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_1) = 1$. Donc puisque $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 < +\infty$, par le théorème du rang,
$$\operatorname{rg}(u) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\operatorname{Ker}(u)) = 3 - 1 = 2.$$
Ainsi,
$$\boxed{\operatorname{rg}(u) = 2.}$$
En particulier,
$$\dim(\operatorname{Im}(u)) = \operatorname{rg}(u) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2).$$
Or par définition de u, $\operatorname{Im}(u) \subseteq \mathbb{R}^2$. Donc,
$$\operatorname{Im}(u) = \mathbb{R}^2.$$
Conclusion,
$$\boxed{u \text{ est surjective dans } \mathbb{R}^2.}$$

4. Posons $\mathscr{B}_2 = \left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ et $G = \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_2)$. Donc $\mathscr{B}_2$ engendre G. De plus $\mathscr{B}_2$ est libre en tant que sous-famille de la base canonique. Donc $\mathscr{B}_2$ est une base de G. De plus, par ce qui précède, $\mathscr{B}_1$ est une base de $\operatorname{Ker}(u)$. Posons $\mathscr{B}_3 = (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$. Montrons que $\mathscr{B}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   - Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors,
   $$\begin{cases} a = 0 \\ a + b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c = 0.$$
   Donc $\mathscr{B}_3$ est libre.
   - De plus $\operatorname{Card}(\mathscr{B}_3) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

   Donc $\mathscr{B}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On a donc les points suivants :

   - $\mathscr{B}_1$ est une base de $\operatorname{Ker}(u)$,
   - $\mathscr{B}_2$ est une base de G,
   - $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Conclusion, par le théorème de la base adaptée,

$$\boxed{G = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) \text{ est un supplémentaire de } \mathrm{Ker}\,(u).}$$

5. Déterminons l'image de v. On sait que $\mathscr{C} = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc

$$\mathrm{Im}\,(v) = \mathrm{Vect}\left(v\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right), v\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right), v\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)\right).$$

Or

$$v\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = B\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 6 & -2 & -4\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\6\end{bmatrix}.$$

De même, $v\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $v\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$. Ainsi,

$$\mathrm{Im}\,(v) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}-3\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}\right).$$

On observe que $C_1 = -3C_2$ et $C_3 = -2C_2$. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(v) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right).}$$

D'autre part, soit $X = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
X \in \mathrm{Ker}\,(v) \quad &\Leftrightarrow \quad v(X) = 0_{\mathbb{R}^2}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 6 & -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}-3x + y + 2z = 0\\ 6x - 2y - 4z = 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad -3x + y + 2z = 0 \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1\\
&\Leftrightarrow \quad y = 3x - 2z\\
&\Leftrightarrow \quad X = \begin{bmatrix}x\\3x-2z\\z\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(v) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}\right).}$$

Posons $\mathscr{B}_4 = \left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)$. La famille $\mathscr{B}_4$ engendre $\mathrm{Im}\,(v)$ et est libre car composée d'un seul vecteur non nul. Donc $\mathscr{B}_4$ base de $\mathrm{Im}\,(v)$. D'où

$$\dim\left(\mathrm{Im}\,(v)\right) = \mathrm{Card}\left(\mathscr{B}_4\right) = 1.$$

D'autre part, posons $\mathscr{B}_5 = \left(\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}\right)$. La famille $\mathscr{B}_5$ engendre $\mathrm{Ker}\,(v)$ et est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires. Donc $\mathscr{B}_5$ base de $\mathrm{Ker}\,(v)$. D'où,

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\,(v)\right) = \mathrm{Card}\left(\mathscr{B}_5\right) = 2.$$

Ainsi,

$$\dim\left(\mathrm{Im}\,(v)\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}\,(v)\right) = 1 + 2 = 3 = \dim\left(bbR^3\right),$$

$\boxed{\text{ce qui est bien cohérent avec le théorème du rang.}}$

6. Montrons que $\mathrm{Ker}\,(u) \subseteq \mathrm{Ker}\,(v)$. Soit $X \in \mathrm{Ker}\,(u)$. Par la question 2. il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X = \lambda\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda\\\lambda\\\lambda\end{bmatrix}$. Calculons alors l'image de X par v :

$$v\,(X) = BX = \begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 6 & -2 & -4\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\\\lambda\\\lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\,\lambda + \lambda + 2\,\lambda\\ 6\,\lambda - 2\,\lambda - 4\,\lambda\end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Donc $X \in \mathrm{Ker}\,(v)$. Ceci étant vrai pour $X \in \mathrm{Ker}\,(u)$ quelconque, on en déduit que

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(u) \subseteq \mathrm{Ker}\,(v).}$$

Pour $C = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2\,(\mathbb{R})$ on définit $w \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ par $w : X \mapsto CX$.

7. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
B = CA \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-b & -a+2b & -a-b \\ 2c-d & -c+2d & -c-d \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a-b = -3 \\ -a+2b = 1 \\ -a-b = 2 \\ 2c-d = 6 \\ -c+2d = -2 \\ -c-d = -4 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -a+2b = 1 \\ 2a-b = -3 \\ -a-b = 2 \\ -c+2d = -2 \\ 2c-d = 6 \\ -c-d = -4 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_4 \leftrightarrow L_5 \end{array} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -a+2b = 1 \\ 3b = -1 \\ -3b = 1 \\ -c+2d = -2 \\ 3d = 2 \\ -3d = -2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_4 \end{array} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 2b - 1 = -2/3 - 1 = -5/3 \\ b = -1/3 \\ c = 2d + 2 = 4/3 + 2 = 10/3 \\ d = 2/3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\exists! C \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ B = CA \text{ donnée par } C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Vérification,

$$CA = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -9 & 3 & 6 \\ 18 & -6 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix} = B \ \ OK\,!$$

8. Soit $X \in \mathbb{R}^3$. On a les égalités dans $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$w \circ u\,(X) = W\,(AX) = C\,(AX) = CAX = BX \qquad \text{par la question précédente.}$$

Donc

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \quad w \circ u\,(X) = v\,(X)\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{w \circ u = v.}$$

Partie 2 : Deux chemins qui ne mènent à $\mathbb{R}_1$ (c'est déjà quelque chose)

Soit $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on définit

$$u \quad : \quad \begin{aligned} \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto X^2 P'' - 2P. \end{aligned}$$

9. L'application u est bien définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ et de plus si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\deg(P) \leqslant n$ et donc

$$\deg(u(P)) \leqslant \max\left(\deg\left(X^2 P''\right), \deg(2P)\right) = \max\left(2 + \deg\left(P''\right) - 2, \deg(P)\right) = \deg(P) \leqslant n.$$

Donc $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ et on a bien u définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Soient maintenant $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$. On a

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= X^2 (\lambda P + \mu Q)'' - 2(\lambda P + \mu Q) \\ &= X^2 \left(\lambda P'' + \mu Q''\right) - 2\lambda P - 2\mu Q && \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda\left(X^2 P'' - 2P\right) + \mu\left(X^2 Q'' - 2Q\right) \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q). \end{aligned}$$

Donc u est linéaire. Conclusion,

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

10. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(u) \quad &\Leftrightarrow \quad u(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\Leftrightarrow \quad X^2 P'' - 2P = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\Leftrightarrow \quad X^2 P'' = 2P. \end{aligned}$$

L'égalité des degrés fonctionne, regardons donc les coefficients dominants.

Notons $d = \deg(P)$ et $a_d \neq 0$ le coefficient dominant de P. Si $d \geqslant 2$, alors le coefficient dominant de $X^2 P''$ est celui de P'' et donc $d(d-1)a_d$. Par unicité des coefficients d'un polynôme, si $X^2 P'' = 2P$, alors $X^2 P''$ et $2P$ ont le même coefficient dominant :

$$d(d-1)a_d = 2a_d \quad \Leftrightarrow \quad d^2 - d = 2 \qquad \text{car } a_d \neq 0$$

On observe que -1 est racine de $X^2 - X - 2$. Donc $d^2 - d - 2 = 0 \Leftrightarrow (d+1)(d-2) = 0 \Leftrightarrow d = -1$ *OU* $d = 2 \Leftrightarrow d = 2$. Fixons donc $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$. On obtient alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(u) \quad &\Leftrightarrow \quad X^2(2a_2) = 2\left(a_0 + a_1 X + a_2 X^2\right) \\ &\Leftrightarrow \quad 2a_2 X^2 = 2a_2 X^2 + 2a_1 X + 2a_0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a_2 = 2a_2 \\ 0 = 2a_1 \\ 0 = 2a_0 \end{cases} && \text{par unicité des coefficients d'un polynômes} \\ &\Leftrightarrow \quad a_0 = a_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad P = a_2 X^2. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}\left(X^2\right).}$$

11. La famille $\left(X^2\right)$ est libre (un seul vecteur non nul) et engendre $\mathrm{Ker}\,(u)$ donc est une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$. Ainsi, $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(u)\right) = 1$. Donc par le théorème du rang, car $E = \mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie,
$$\mathrm{rg}\,(u) = \dim(E) - \dim\left(\mathrm{Ker}\,(u)\right) = \dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right) - 1 = n + 1 - 1.$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathrm{rg}\,(u) = n.}$$

On pose
$$\begin{aligned} v \quad : \quad & \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_1[X] \\ & P \mapsto \left(P(0) + P(1) - \frac{P''(1)}{2}\right) X + P(0) + 2P(1) - P''(1). \end{aligned}$$
On admet que v est linéaire (facile à faire si vous voulez vous entrainer).

12. Puisque $\left(X^2\right)'' = 2$, on a les égalités entre polynômes suivantes :
$$v\left(X^2\right) = \left(0 + 1 - \frac{2}{2}\right) X + 0 + 2 - 2 = 0_{\mathbb{R}_1[X]}.$$
Ainsi $X^2 \in \mathrm{Ker}\,(v)$. Or $\mathrm{Ker}\,(v)$ est un espace vectoriel donc $\mathrm{Vect}\left(X^2\right) \subseteq \mathrm{Ker}\,(v)$. Or par la question 10. $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Vect}\left(X^2\right)$. Conclusion,
$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(u) \subseteq \mathrm{Ker}\,(v)\,.}$$

13. On vérifie facilement que l'application w définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $w(P) = -\frac{X+1}{2}P(0) - \frac{X+2}{2}P(1)$ est un élément de $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_1[X]\right)$. Montrons que $v = w \circ u$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ posons $Q = u(P)$. On a alors
$$Q(0) = 0^2 P''(0) - 2P(0) = -2P(0) \qquad \text{et} \qquad Q(1) = 1^2 P''(1) - 2P(1) = P''(1) - 2P(1).$$
Ainsi,
$$\begin{aligned} w \circ u\,(P) = w\,(Q) &= -\frac{X+1}{2}Q(0) - \frac{X+2}{2}Q(1) \\ &= -\frac{X+1}{2}\left(-2P(0)\right) - \frac{X+2}{2}\left(P''(1) - 2P(1)\right) \\ &= P(0)X + P(0) - \frac{P''(1)}{2}X - P''(1) + XP(1) + 2P(1) \\ &= \left(P(0) + P(1) - \frac{P''(1)}{2}\right) X + P(0) + 2P(1) - P''(1) \\ &= v\,(P)\,. \end{aligned}$$
Ceci étant vrai pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on conclut que
$$\boxed{w \circ u = v.}$$

14. (a) Puisque $1'' = X'' = 0$, par définition de v, on a
$$\begin{aligned} v(1) &= \left(1 + 1 - \frac{0}{2}\right) X + 1 + 2 - 0 = 2X + 3 \\ v(X) &= \left(0 + 1 - \frac{0}{2}\right) X + 0 + 2 - 0 = X + 2. \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{v(1) = 2X + 3 \qquad \text{et} \qquad v(X) = X + 2.}$$

(b) Les vecteurs $v(1)$ et $v(X)$ sont bien entendu des vecteurs de $\mathrm{Im}\,(v)$. Or d'après la question précédente, $v(1) = 2X+3$ et $v(X) = X+2$. Ces vecteurs sont donc non colinéaires et forme donc une famille libre de $\mathrm{Im}\,(v)$. Donc

$$2 = \mathrm{Card}\,(v(1), v(X)) \leqslant \dim\left(\mathrm{Im}\,(v)\right) \leqslant \dim\left(\mathbb{R}_1[X]\right) = 2,$$

la dernière inégalité découlant du fait que $\mathrm{Im}\,(v) \subseteq \mathbb{R}_1[X]$. Donc ces inégalités sont nécessairement des égalités : $\dim\left(\mathrm{Im}\,(v)\right) = 2 = \dim\left(\mathbb{R}_1[X]\right)$. Or $\mathrm{Im}\,(v) \subseteq \mathbb{R}_1[X]$ donc on conclut que

$$\mathrm{Im}\,(v) = \mathbb{R}_1[X] \qquad \text{i.e.} \boxed{v \text{ est surjective.}}$$

15. D'après la question précédente, $\mathrm{Im}\,(v) = \mathbb{R}_1[X]$ et donc $\mathrm{rg}\,(v) = \dim\left(\mathbb{R}_1[X]\right) = 2$. Donc d'après le théorème du rang,

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\,(v)\right) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{espace de départ de } v}}{\dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right)} - \mathrm{rg}\,(v) = n+1-2 = n-1.$$

Donc si $n \geqslant 3$,

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\,(v)\right) \geqslant 2.$$

Or d'après la question 11., on sait que $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(u)\right) = 1$. Ainsi

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\,(v)\right) \geqslant 2 > 1 = \dim\left(\mathrm{Ker}\,(u)\right).$$

Conclusion, les dimensions étant différentes, on a nécessairement,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(u) \neq \mathrm{Ker}\,(v)\,.}$$

La dimension, c'est béton !

Partie 3 : So 2010...

16. Soit $w \in \mathscr{L}(F,G)$, telle que $v = w \circ u$. Montrons que $\mathrm{Ker}\,(u) \subseteq \mathrm{Ker}\,(v)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(u)$, alors $u(x) = 0_F$. En composant par w, on a

$$v(x) = w \circ u(x) = w\left(u(x)\right) = w\left(0_F\right) = 0_G \qquad \text{car } w \text{ est linéaire.}$$

Donc $x \in \mathrm{Ker}\,(v)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(u) \subseteq \mathrm{Ker}\,(v)\,.}$$

On note $n = \dim(E)$, $r = \dim(F)$ et $p = n - \dim\left(\mathrm{Ker}\,(u)\right)$.

17. Puisque $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(u)\right) = p-n$ et donc que $\mathrm{Ker}\,(u)$ est de dimension finie égale à $p-n$, on en déduit d'après le cours qu'il existe $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une famille de $n-p$ vecteurs de $\mathrm{Ker}\,(u)$ qui soit une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$. Par le théorème de la base incomplète, on peut ensuite compléter cette base en $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On a donc bien construit

$$\boxed{\text{une base } (e_1, \ldots, e_n) \text{ de } E \text{ telle que } (e_{p+1}, \ldots, e_n) \text{ soit une base de } \mathrm{Ker}\,(u).}$$

De plus par le théorème du rang, car E est de dimension finie,

$$\boxed{\dim\left(\mathrm{Im}\,(u)\right) = \dim(E) - \dim\left(\mathrm{Ker}\,(u)\right) = n - (n-p) = p.}$$

18. Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, on pose $f_i = u(e_i)$. Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$ puisque f_i est l'image d'un élément de E par u, on en déduit que $f_i \in \operatorname{Im}(u)$. Montrons que $(f_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ est une famille libre. Soient $(\lambda_i)_{i\in[\![1;p]\!]} \in \mathbb{K}^p$ telle que
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, f_i = 0_F.$$
Donc, par linéarité de u,
$$0_F = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, f_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, f(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, e_i\right).$$
Donc $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, e_i \in \operatorname{Ker}(u)$. Or $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base et donc une famille génératrice de $\operatorname{Ker}(u)$. Par conséquent,
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, e_i \in \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n).$$
Donc il existe $(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-p}$ tel que
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, e_i = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i\, e_i \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, e_i - \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i\, e_i = 0_E.$$
Ainsi
$$\lambda_1\, e_1 + \cdots + \lambda_p\, e_p + (-\lambda_{p+1})\, e_{p+1} + \cdots + (-\lambda_n)\, e_n = 0_E$$
Or $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et est donc une famille libre. Donc
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = -\lambda_{p+1} = \cdots = -\lambda_n = 0_{\mathbb{K}}.$$
En particulier, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $\lambda_i = 0$. On a donc bien prouvé que $(f_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ est une famille libre de $\operatorname{Im}(u)$. Or, d'après la question précédente,
$$\operatorname{Card}\left((f_i)_{i\in[\![1;p]\!]}\right) = p = \dim(\operatorname{Im}(u)).$$
On en conclut que
$$\boxed{(f_i)_{i\in[\![1;p]\!]} \text{ est une base de } \operatorname{Im}(u).}$$

19. On a vu à la question précédente que la famille $(f_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ est libre dans $\operatorname{Im}(f)$ et donc dans F. Donc par le théorème de la base incomplète, puisque $r = \dim(F)$, il existe $(f_{p+1}, \dots, f_r)$ des vecteurs de F tels que
$$\boxed{(f_i)_{i\in[\![1;r]\!]} \text{ soit une base de } F.}$$

On définit alors $w \in \mathscr{L}(F, G)$ par
$$\forall i \in [\![1;r]\!], \qquad w(f_i) = \begin{cases} v(e_i) & \text{si } i \in [\![1;p]\!] \\ 0_G & \text{sinon.} \end{cases}$$
On suppose que $\operatorname{Ker}(u) \subseteq \operatorname{Ker}(v)$.

20. Montrons que $v = w \circ u$. On sait que u, v et w sont des applications linéaires. De plus les applications linéaires sont entièrement définies par l'image d'une base. Il nous suffit donc de montrer que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $v(e_i) = w \circ u(e_i)$. Soit $i \in [\![1;n]\!]$.

   - Premier cas, $i \in [\![1;p]\!]$, alors par définition de f_i, on a $u(e_i) = f_i$ et donc
$$w \circ u(e_i) = w(f_i) = v(e_i) \qquad \text{par définition de } v(e_i).$$

- Second cas, $i \in [\![p+1;n]\!]$ alors par construction de la famille $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$, on sait que $e_i \in \operatorname{Ker}(u)$, donc $u(e_i) = 0_F$ et par composition par w, $w \circ u(e_i) = 0_G$. D'autre part, on a supposé que $\operatorname{Ker}(u) \subseteq \operatorname{Ker}(v)$ donc on a également $e_i \in \operatorname{Ker}(v)$, i.e. $v(e_i) = 0_G$. Ainsi on obtient

$$w \circ u(e_i) = 0_G = v(e_i).$$

On a donc bien montré que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $w \circ u(e_i) = v(e_i)$. Or des applications linéaires coïncidant sur une base sont égales. Conclusion,

$$\boxed{v = w \circ u.}$$

21. Montrons que $\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Im}(w)$. Soit $y \in \operatorname{Im}(v)$. Alors, il existe $x \in E$ tel que $y = v(x)$. Or par la question précédente, $v = w \circ u$. D'où

$$y = w \circ u(x) = w(u(x)) \in \operatorname{Im}(w).$$

Ainsi,

$$\operatorname{Im}(v) \subseteq \operatorname{Im}(w).$$

Réciproquement, soit $y \in \operatorname{Im}(w)$. Dès lors, il existe $x \in F$ tel que $y = w(x)$. Par la question 19. $(f_i)_{i\in[\![1;r]\!]}$ est une base de F donc

$$\exists\, (\lambda_i)_{i\in 1;r]\!]} \in \mathbb{K}^r, \quad x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} y = w(x) = w\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i\right) &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i w(f_i) \qquad \text{car } w \text{ est linéaire} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v(e_i) + 0_G \qquad \text{par définition de } w \\ &= v\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i\right) \qquad \text{par linéarité de } v. \end{aligned}$$

Ce qui démontre que $y \in \operatorname{Im}(v)$. Donc $\operatorname{Im}(w) \subseteq \operatorname{Im}(v)$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Im}(w).}$$

22. Montrons que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(v) \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(w) \oplus \operatorname{Im}(u)$. Supposons $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(v)$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(w) \oplus \operatorname{Im}(u)$. Alors,

$$\begin{cases} x \in \operatorname{Ker}(w) \\ x \in \operatorname{Im}(u) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} w(x) = 0_G \\ \exists a \in E,\ x = u(a). \end{cases}$$

Donc $w(u(a)) = 0_G$. Or $v = w \circ u$ donc $v(a) = 0_G$ i.e. $a \in \operatorname{Ker}(v) = \operatorname{Ker}(u)$. Donc $u(a) = 0_F$. Ainsi,

$$x = u(a) = 0_F.$$

D'où $\operatorname{Ker}(w) \oplus \operatorname{Im}(u) \subseteq \{0_F\}$. Or $\{0_F\} \subseteq \operatorname{Ker}(w) \oplus \operatorname{Im}(u)$. Donc

$$\operatorname{Ker}(w) \oplus \operatorname{Im}(u) = \{0_F\}.$$

Par caractérisation on en déduit que $\mathrm{Ker}\,(w)$ et $\mathrm{Im}\,(u)$ sont en somme directe. On a donc démontré que
$$\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(v) \;\Rightarrow\; \mathrm{Ker}\,(w) \oplus \mathrm{Im}\,(u)\,.$$
Réciproquement, supposons $\mathrm{Ker}\,(w) \oplus \mathrm{Im}\,(u)$ i.e. $\mathrm{Ker}\,(w) \oplus \mathrm{Im}\,(u) = \{0_F\}$. Montrons que $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(v)$. On sait déjà que $\mathrm{Ker}\,(u) \subseteq \mathrm{Ker}\,(v)$. Montrons que $\mathrm{Ker}\,(v) \subseteq \mathrm{Ker}\,(u)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(v)$, alors, $v(x) = 0_G$. Or $v = w \circ u$ donc $w\,(u(x)) = 0_G$. D'où, $u(x) \in \mathrm{Ker}\,(w)$. Or $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ donc $u(x) \in \mathrm{Ker}\,(w) \oplus \mathrm{Im}\,(u) = \{0_F\}$ et nécessairement $u(x) = 0_F$. Donc $x \in \mathrm{Ker}\,(u)$. Cela démontre bien que $\mathrm{Ker}\,(v) \subseteq \mathrm{Ker}\,(u)$. Donc $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(v)$ et ainsi,
$$\mathrm{Ker}\,(w) \oplus \mathrm{Im}\,(u) \;\Rightarrow\; \mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(v)\,.$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(v) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Ker}\,(w) \oplus \mathrm{Im}\,(u)\,.}$$

23. Supposons $\mathrm{Ker}\,(w) \oplus \mathrm{Im}\,(u)$. Montrons que $\mathrm{Ker}\,(w)$ et $\mathrm{Im}\,(u)$ sont supplémentaires. Posons $k = \dim\left(\mathrm{Ker}\,(w)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}\,(u)\right)$. On a
$$\begin{aligned}
k &= \dim\left(\mathrm{Ker}\,(w)\right) + p \qquad \text{par la question 17.}\\
&= \dim\left(F\right) - \dim\left(\mathrm{Im}\,(w)\right) + p \qquad \text{par le théorème du rang car } F \text{ est de dimension finie}\\
&= r - \dim\left(\mathrm{Im}\,(v)\right) + p \qquad \text{par la question 21.}\\
&= r - \left(n - \dim\left(\mathrm{Ker}\,(v)\right)\right) + p \qquad \text{par le théorème du rang car } E \text{ est de dimension finie}\\
&= r - n + \dim\left(\mathrm{Ker}\,(u)\right) + p \qquad \text{par la question précédente}\\
&= r - n + (n-p) + p\\
&= r.
\end{aligned}$$
Donc
$$\dim\left(\mathrm{Ker}\,(w)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}\,(u)\right) = \dim\left(F\right).$$
Conclusion, dans ce cas,
$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(w) \oplus \mathrm{Im}\,(u) = F.}$$

Problème III - Intégration

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose
$$h(x) = \int_1^{2x^2} \frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}\,\mathrm{d}t.$$

Partie 1 : Une fonction h-ment intéressante.

1. (a) Pour tout $t > 0$, on pose
$$f(t) = \frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}.$$
La fonction f est définie et même continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors $2x^2 > 0$. Donc $\left[1; 2x^2\right]$ (ou $\left[2x^2; 1\right]$) est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc
$$h(x) = \int_1^{2x^2} \frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{2x^2} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe.}$$
Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on en déduit que
$$\boxed{h \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}^*.}$$

(b) On a

- $\mathbb{R}^*$ est centré en 0.
- Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$h(-x) = \int_1^{2(-x)^2} \frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{2x^2} \frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}\,\mathrm{d}t = h(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{h \text{ est paire.}}$$

(c) Pour tout $t > 0$, on a $f(t) = \frac{\arctan(\sqrt{t})}{4t} \geqslant 0$. Donc par croissance de l'intégrale, si $2x^2 \geqslant 1$, on a

$$h(x) = \int_1^{2x^2} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Or $2x^2 \geqslant 1 \iff x^2 \geqslant \frac{1}{2} \iff x \in \left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[$. Ainsi,

$$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[, \qquad h(x) \geqslant 0.$$

Soit maintenant $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right[\cup \left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Alors $0 < 2x^2 \leqslant 1$. Et puisque pour tout $t \in]0;1]$, $f(t) \geqslant 0$, on en déduit par croissance de l'intégrale que

$$\int_{2x^2}^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Donc

$$h(x) = \int_1^{2x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{2x^2}^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

Cherchons maintenant les valeurs d'annulation de h. Si $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou si $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a $2x^2 = 1$ et donc

$$h(x) = \int_1^{2x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrons que ce sont les seules valeurs d'annulation. Soit $x \in \mathbb{R}^* \setminus \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. Supposons que

$$\int_1^{2x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

On sait que f est positive sur $\left[1; 2x^2\right]$ (ou $\left[2x^2; 1\right]$) et continue. Donc si son intégrale est nulle par la propriété de séparation de l'intégrale car $1 \neq 2x^2$, on en déduit que

$$\forall t \in \left[1; 2x^2\right] \text{ ou } \left[2x^2; 1\right], \qquad f(t) = 0.$$

Or pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t) > 0$, contradiction. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^* \setminus \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $h(x) \neq 0$. Conclusion,

$$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[, \qquad h(x) > 0$$
$$\forall x \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[, \qquad h(x) < 0$$
$$h\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

2. (a) On a déjà vu que $f : t \mapsto \frac{\arctan(\sqrt{t})}{4t}$ est définie et même continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons pour tout $x > 0$,
$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Par le théorème fondamental de l'analyse, F est bien définie et même $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$,
$$F'(x) = f(x).$$
Or f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et quotient de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas (la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 mais 0 a déjà été exclu). On en déduit donc que F' est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi F est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a
$$h(x) = F\left(2x^2\right),$$
et $x \mapsto 2x^2$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Conclusion, h est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$. De plus par dérivation d'une composée, on a
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad h'(x) &= \left(2x^2\right)' F'\left(2x^2\right)\\ &= 4xf\left(2x^2\right)\\ &= 4x\frac{\arctan\left(\sqrt{2x^2}\right)}{8x^2}\\ &= \frac{\arctan\left(\sqrt{2}x\right)}{2x} \qquad\qquad \text{car } x > 0.\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{h \text{ est } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^* \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad h'(x) = \frac{\arctan\left(\sqrt{2}x\right)}{2x}.}$$

(b) On a pour tout $x > 0$, $h'(x) = \frac{\arctan(\sqrt{2}x)}{2x} > 0$. Donc la fonction h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ puis par parité, on en déduit que h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$. On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
h		$\searrow$	0	$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

3. (a) On sait que
$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$
et $y = x$ est la tangente de la fonction arctangente en 0. Donc
$$\arctan(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{3}.$$

Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré. Donc $\arctan(x) - x$ est négatif en 0^+ et positif en 0^-. Autrement dit il existe $\varepsilon > 0$ tel que la courbe représentative de la fonction arctangente est

$$\boxed{\text{au-dessus de sa tangente sur } [-\varepsilon; 0] \text{ et en dessous de sa tangente sur } [0; \varepsilon].}$$

(b) Montrons que pour tout $x > 0$, on a $\arctan(x) \leqslant x$. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = x - \arctan(x)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geqslant 0.$$

Donc la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $g(0) = 0$. Donc par croissance, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \geqslant g(0) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \arctan(x) \leqslant x.}$$

(c) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\sqrt{t} \in \mathbb{R}_+^*$ et donc par la question précédente,

$$\arctan\left(\sqrt{t}\right) \leqslant \sqrt{t}.$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t} \leqslant \frac{\sqrt{t}}{4t} = \frac{1}{4\sqrt{t}}.$$

Soit $x \in \left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Alors $2x^2 \leqslant 1$. Donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_{2x^2}^{1} \frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{2x^2}^{1} \frac{1}{4\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sqrt{t}}{2}\right]_{t=2x^2}^{t=1} = \frac{1-\sqrt{2}\,|x|}{2} = \frac{1-\sqrt{2}x}{2} \qquad \text{car } x > 0$$

Or $-\frac{\sqrt{2}x}{2} < 0$. Donc

$$\int_{2x^2}^{1} \frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$h(x) = \int_{1}^{2x^2} \frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}\,\mathrm{d}t = -\int_{2x^2}^{1} \frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}\,\mathrm{d}t \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, on en déduit que

$$\boxed{h \text{ est minorée par } -\frac{1}{2} \text{ sur } \left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right].}$$

(d) On a vu que h est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc pour tout $x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a

$$h(x) \geqslant h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Or par la question précédente, on a en particulier $h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geqslant -\frac{1}{2}$. Donc

$$\forall x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad h(x) \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Cette inégalité étant aussi vraie pour tout $x \in \left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ d'après la question précédente, on en déduit bien que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) \geqslant -\frac{1}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est minorée par } -\frac{1}{2} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

4. On a vu que la fonction h est croissante sur $]0;+\infty[$ et minorée par $-\frac{1}{2}$ sur cet intervalle. Donc par le théorème de convergence monotone, on en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$

Notons $\alpha = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x)$ cette limite. Puisque pour tout $x>0$, $h(x) \geqslant -\frac{1}{2}$, par passage à la limite, on en déduit que $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$. De plus pour tout $x \in \left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, on a $h(x) \leqslant 0$ par la question 1.c. Donc par passage à la limite, on a aussi $\alpha \leqslant 0$. Etendons la définition de h en posant $h(0)=\alpha$. On a alors par définition de α,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = h(0).$$

De plus par parité pour tout $x<0$, $h(x) = h(-x)$. Donc par le changement de variable $u=-x$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} h(x) = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} h(-u) = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} h(u) = h(0).$$

Donc la limite à droite et à gauche coïncident et valent $h(0)$. Donc on peut bien étendre h en une $\boxed{\text{fonction continue en 0 avec } h(0)=\alpha \in \left[-\frac{1}{2};0\right].}$

5. (a) D'après la question 2.a, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = \frac{\arctan(\sqrt{2}x)}{2x}$. Or

$$\frac{\arctan\left(\sqrt{2}x\right)}{2x} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\sim} \frac{\sqrt{2}x}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'où,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

(b) Par ce qui précède, la fonction h est

- continue sur $\mathbb{R}_+$,
- dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
- admet une limite finie à droite en 0.

Par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ on en déduit que la restriction de h sur $\mathbb{R}_+$ est $\mathscr{C}^1$ et notamment que

$$\boxed{\text{la dérivée à droite en 0 de } h \text{ existe et vaut } \frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

De plus l'équation de sa demi-tangente à droite est donnée pour tout $x \geqslant 0$ par

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + h(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \alpha.}$$

On obtient également le développement limité suivant :

$$\boxed{h(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}x + o\left(x\right).}$$

(c) Par parité de la fonction h, on en déduit également que h est dérivable à gauche mais par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, sa demi-tangente à gauche a pour équation pour tout $x \leqslant 0$

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \alpha.$$

Autrement dit h est aussi dérivable à gauche et

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \neq \frac{\sqrt{2}}{2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{h(x)-h(0)}{x-0}.$$

Par conséquent le taux d'accroissement n'admet aucune limite globale et

$$\boxed{h \text{ n'est pas dérivable en } 0 \text{ mais présente un point anguleux.}}$$

Partie 2 : Un étudiant qui s'est intégré passe en deuxième année

6. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $u = \sqrt{t}$, alors $t = u^2$. La fonction $u \mapsto u^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$ et donc

$$h(x) = \int_1^{2x^2} \frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{2}|x|} \frac{\arctan(u)}{4u^2} 2u\,\mathrm{d}u = \int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan(u)}{2u}\,\mathrm{d}u \qquad \text{car } x > 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad h(x) = \int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan(u)}{2u}\,\mathrm{d}u.}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, par la question précédente et linéarité de l'intégrale, on a

$$\frac{\pi}{2}\int_1^{\sqrt{2}x} \frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u - h(x) = \int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\frac{\pi}{2}}{2u}\,\mathrm{d}u - \int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan(u)}{2u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(u)}{2u}\,\mathrm{d}u.$$

Or pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(u) + \arctan\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}$ et donc $\frac{\pi}{2} - \arctan(u) = \arctan\left(\frac{1}{u}\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{\pi}{2}\int_1^{\sqrt{2}x} \frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u - h(x) = \int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan\left(\frac{1}{u}\right)}{2u}\,\mathrm{d}u.}$$

8. On a d'une part,

$$\frac{\pi}{2}\int_1^{\sqrt{2}x} \frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(|u|)\right]_{u=1}^{u=\sqrt{2}x} = \frac{\pi}{4}\ln\left(\sqrt{2}x\right).$$

D'autre part, en posant $v = \frac{1}{u}$ i.e. $u = \frac{1}{v}$. La fonction $v \mapsto \frac{1}{v}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{d}u = -\frac{1}{v^2}\,\mathrm{d}v$. Donc on a

$$\int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan\left(\frac{1}{u}\right)}{2u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}x}} \frac{\arctan(v)}{\frac{2}{v}} \frac{-1}{v^2}\,\mathrm{d}v = -\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}x}} \frac{\arctan(v)}{2v}\,\mathrm{d}v.$$

Or par la question 6., on a

$$h\left(\frac{1}{2x}\right) = \int_1^{\sqrt{2}\times\frac{1}{2x}} \frac{\arctan(u)}{2u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}x}} \frac{\arctan(u)}{2u}\,\mathrm{d}u.$$

L'indice d'intégration étant muet, on en déduit que

$$-\int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan\left(\frac{1}{u}\right)}{2u}\,\mathrm{d}u = -h\left(\frac{1}{2x}\right).$$

Donc par la question précédente, on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{\pi}{4}\ln\left(\sqrt{2}x\right) - h(x) = -h\left(\frac{1}{2x}\right).}$$

9. Par la question précédente, pour tout $x > 0$,

$$h(x) = \frac{\pi}{4} \ln\left(\sqrt{2}x\right) + h\left(\frac{1}{2x}\right) = \frac{\pi}{4} \ln(x) + \frac{\pi \ln(2)}{8} + h\left(\frac{1}{2x}\right).$$

Or on a vu à la question 5.b que

$$h(u) \underset{\substack{u \to 0 \\ u > 0}}{=} \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} u + o(u).$$

Donc en posant $u = \frac{1}{2x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0^+$, on a

$$h(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{\pi}{4} \ln(x) + \frac{\pi \ln(2)}{8} + \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{h(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{\pi}{4} \ln(x) + \frac{\pi \ln(2)}{8} + \alpha + \frac{\sqrt{2}}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right).}$$

Partie 3 : En parlant de deuxième année : une petite série entière

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \qquad \text{et} \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n(1) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n(1)| = \frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{4n^2} > 0$. Donc d'après le théorème des équivalents des séries à termes positifs, les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n(1)|$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{4n^2}$ sont de même nature. Or $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{4n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n(1)| \text{ converge.}$$

Autrement $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(1)$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(1) \text{ converge.}}$$

11. Soit $x \in [0;1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x^{2n+1} \leqslant 1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant |u_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2}\right| = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \leqslant \frac{1}{(2n+1)^2} = |u_n(1)|.$$

Or on a vu à la question précédente que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n(1)|$ converge. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n(x)| \text{ converge.}$$

Autrement dit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in [0;1], \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) \text{ converge.}}$$

12. Soit $x > 1$. Alors par croissance comparée, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} = +\infty.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} |u_n(x)| = +\infty$. Or on sait que si $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers ℓ) alors $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également (vers $|\ell|$). Donc par contraposée, puisque $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge nécessairement $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge (attention pas nécessairement vers $+\infty$, ici la sous-suite des termes pairs diverge vers $+\infty$ mais la sous-suite des termes impairs diverge vers $-\infty$). Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) \text{ diverge grossièrement et donc diverge.}}$$

Partie 4 : Un tas d'or est caché dans la grange

On rappelle que l'on a prolongé h en 0 par une valeur notée $\alpha \in \left[-\frac{1}{2};0\right]$ et que l'on a montré à la question 6. que

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \alpha.$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $u \in \mathbb{R}$, $\left|\arctan^{(n)}(u)\right| \leqslant (n-1)!$.
On fixe $n \in \mathbb{N}$.

13. On pouvait donner les coefficient a_k sans démonstration. Faisons un peu mieux ici : on sait que

$$\arctan(u) \underset{u\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} u^{2k+1}}{2k+1} + o\left(u^{2n+2}\right).$$

On sait de plus que la fonction arctan est $\mathscr{C}^{2n+1}$ sur $\mathbb{R}$ donc par la formule de Taylor-Young, on a

$$\arctan(u) \underset{u\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{\arctan^{(k)}(0)u^k}{(k)!} + o\left(u^{2n+2}\right).$$

Donc par unicité du développement limité, on en déduit que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\arctan^{(2k)}(0) = 0$ et

$$\frac{\arctan^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} = \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} = a_k.$$

La fonction arctan est $\mathscr{C}^{2n+2}$ sur $[0;1]$. Donc par la formule de Taylor-Lagrange, on en déduit que pour tout $u \in [0;1]$,

$$\left|\arctan(u) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\arctan^{(2k+1)}(0)u^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leqslant \sup_{z\in[0;u]} \left|\arctan^{(2n+2)}(z)\right| \frac{(u-0)^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Or d'après l'énoncé, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $\left|\arctan^{(2n+2)}(z)\right| \leqslant (2n+1)!$. Conclusion, pour tout $u \in [0;1]$,

$$\boxed{\left|\arctan(u) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} u^{2k+1}}{2k+1}\right| \leqslant \frac{u^{2n+2}}{2n+2}}$$

et les a_k de l'énoncé sont donnés par $a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ pour tout $k \in [\![0;n]\!]$.

14. Soit $x \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Par la question précédente, pour tout $u \in]0;1]$, on a

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} u^{2k+1}}{2k+1} - \frac{u^{2n+2}}{2n+2} \leqslant \arctan(u) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} u^{2k+1}}{2k+1} + \frac{u^{2n+2}}{2n+2} \\ \Rightarrow \quad &\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} u^{2k}}{2k+1} - \frac{u^{2n+1}}{2n+2} \leqslant \frac{\arctan(u)}{u} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} u^{2k}}{2k+1} + \frac{u^{2n+1}}{2n+2} \end{aligned}$$

Puisque $x \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, on a $\sqrt{2}x \in [0;1]$ donc les inégalités précédentes sont vraies sur $\left[\sqrt{2}x; 1\right]$. Par croissance de l'intégrale, car $\sqrt{2}x \leqslant 1$,

$$\int_{\sqrt{2}x}^{1} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} u^{2k}}{2k+1} - \frac{u^{2n+1}}{2n+2} \right) \mathrm{d}u \leqslant \int_{\sqrt{2}x}^{1} \frac{\arctan(u)}{u} \mathrm{d}u \leqslant \int_{\sqrt{2}x}^{1} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} u^{2k}}{2k+1} + \frac{u^{2n+1}}{2n+2} \right) \mathrm{d}u.$$

Calculons :

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{2}x}^{1} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} u^{2k}}{2k+1} + \frac{u^{2n+1}}{2n+2} \right) \mathrm{d}u &= \sum_{k=0}^{n} \int_{\sqrt{2}x}^{1} \frac{(-1)^{k+1} u^{2k}}{2k+1} \mathrm{d}u + \int_{\sqrt{2}x}^{1} \frac{u^{2n+1}}{2n+2} \mathrm{d}u \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{(-1)^{k+1} u^{2k+1}}{(2k+1)^2} \right]_{u=\sqrt{2}x}^{u=1} \mathrm{d}u + \left[\frac{u^{2n+2}}{(2n+2)^2} \right]_{u=\sqrt{2}x}^{u=1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} \left(\sqrt{2}x\right)^{2k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{1 - \left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2}}{(2n+2)^2} \\ &= S_n(1) - S_n\left(\sqrt{2}x\right) - \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2} - 1}{(2n+2)^2}. \end{aligned}$$

De même,

$$\int_{\sqrt{2}x}^{1} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} u^{2k}}{2k+1} - \frac{u^{2n+1}}{2n+2} \right) \mathrm{d}u = S_n(1) - S_n\left(\sqrt{2}x\right) + \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2} - 1}{(2n+2)^2}.$$

Ainsi,

$$S_n(1) - S_n\left(\sqrt{2}x\right) + \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2} - 1}{(2n+2)^2} \leqslant \int_{\sqrt{2}x}^{1} \frac{\arctan(u)}{u} \mathrm{d}u \leqslant S_n(1) - S_n\left(\sqrt{2}x\right) - \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2} - 1}{(2n+2)^2}.$$

Or par la question 6., on a $2h(x) = 2 \times \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan(u)}{u} \mathrm{d}u = -\int_{\sqrt{2}x}^{1} \frac{\arctan(u)}{u} \mathrm{d}u$. Donc en multipliant par -1 les inégalités précédentes, on en déduit que pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$,

$$\boxed{S_n\left(\sqrt{2}x\right) - S_n(1) - \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2} - 1}{(2n+2)^2} \geqslant 2h(x) \geqslant S_n\left(\sqrt{2}x\right) - S_n(1) + \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2} - 1}{(2n+2)^2}.}$$

15. Puisque n est fixé, la fonction $S_n : u \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} u^{2k+1}}{(2k+1)^2}$ est une fonction polynomiale et donc continue sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\lim_{x \to 0} S_n\left(\sqrt{2}x\right) = \lim_{u \to 0} S_n(u) = 0 \qquad \text{car il n'y a pas de terme constant.}$$

De plus $\lim_{x \to 0} \left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2} = 0$ et par définition de α, on a $\lim_{x \to 0} h(x) = \alpha$. Ainsi par passage à la limite quand $x \to 0$ dans le résultat de la question précédente, on a

$$\begin{aligned} &0 - S_n(1) - \frac{0-1}{(2n+2)^2} \geqslant 2\alpha \geqslant 0 - S_n(1) + \frac{0-1}{(2n+2)^2} \\ \Leftrightarrow \quad & -S_n(1) + \frac{1}{(2n+2)^2} \geqslant 2\alpha \geqslant -S_n(1) - \frac{1}{(2n+2)^2} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{-\frac{1}{2}S_n\left(1\right)+\frac{1}{(2n+2)^2}\geqslant\alpha\geqslant-\frac{1}{2}S_n(1)-\frac{1}{(2n+2)^2}.}$$

16. D'après la question 10. la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n\left(1\right)$ converge i.e. la suite des sommes partielles $\left(S_n\left(1\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(2n+2)^2}=0$. Donc par passage à la limite quand $n\to+\infty$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}S_n\left(1\right)+\frac{1}{(2n+2)^2}=\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}S_n(1)-\frac{1}{(2n+2)^2}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\left(1\right).$$

Donc par le théorème d'encadrement,

$$\alpha=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\left(1\right)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\left(2n+1\right)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\left(2n+1\right)^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\left(2n+1\right)^2}.}$$