

Epreuve de mathématiques 1

2023-2024

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroté les copies



Problème 1 - Fonctions réelles

On considère les fonctions suivantes :

$$g : x \mapsto \frac{x^2 + 3}{x + 1} \quad \text{et} \quad f : x \mapsto \frac{x^2}{2} - x + 4 \ln(1 + x).$$

Partie 1 : Etude de g

1. Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de définition de g .
2. En déduire que g n'est ni paire ni impaire.
3. Calculer la dérivée de g sur $\mathcal{D}$.
4. Dresser le tableau de signe de g' sur $\mathcal{D}$.
5. Calculer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.
6. En déduire le tableau de variations complet de g .
7. La fonction g a-t-elle un(des) minimum(s) local(localaux) ? Si oui préciser le(s)quel(s).
8. La fonction g a-t-elle un(des) minimum(s) global(globaux) ? Si oui préciser le(s)quel(s).
9. Résoudre dans $\mathcal{D}$ l'équation $g(x) = -\frac{21}{2}$.
10. Préciser $g \left(]-1; 2[\right)$ et $g^{\leftarrow} \left(\left[-\frac{21}{2}; -7 \right] \right)$.
11. La fonction g est-elle injective ? Justifier.
12. La fonction g est-elle surjective ? Justifier.
13. Préciser le comportement asymptotique de g en $+\infty$.
14. Préciser le comportement asymptotique de g en $-\infty$.
15. Après avoir justifier son existence, calculer pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, $\frac{g(-1+h)+g(-1-h)}{2}$.
16. En déduire que le graphe de g admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées.
17. Tracer le graphe de g sur $\mathcal{D}$. On fera apparaître les différentes asymptotes.

Partie 2 : Etude de f

18. Déterminer U le domaine de définition de f .
19. Déterminer les limites de f aux bornes de U .
20. A l'aide de la partie précédente, déterminer les variations de la fonction f .
21. Montrer que f définit une bijection de U dans un ensemble V à préciser.
22. Déduire de 20. que pour tout $x \in]0; 1[$, $\ln(1+x) > \frac{x(2-x)}{8}$.
23. En déduire que pour tout $x > 1$, $\ln(x+1) - \ln(x) > \frac{2x-1}{8x^2}$.

Problème 2 - Trigonométrie**Partie 1 : Une équation**

On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E) \quad \cos(x) + \cos(3x) = \frac{1}{2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Justifier qu'il existe un unique $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et un unique $\beta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos(\beta) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
- (a) Développer $\cos(3x)$.
(b) En déduire que

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \cos^3(x) - \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{8} = 0.$$

- (a) Factoriser $\cos(x) + \cos(3x)$.
(b) En déduire à nouveau que $(E) \Leftrightarrow \cos^3(x) - \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{8} = 0$.
- Déterminer trois réels $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$X^3 - \frac{X}{2} - \frac{1}{8} = \left(X + \frac{1}{2}\right)(aX^2 + bX + c).$$

- Soient $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E) et $x \in \mathcal{S}_E$. Déterminer les valeurs de $\cos(x)$.
- Déterminer $\mathcal{S}_E$ en fonction de α et β définies à la question 1.

Partie 2 : Calcul de S .

Posons

$$\theta = \frac{\pi}{5} \quad \text{et} \quad S = \cos(\theta) + \cos(3\theta).$$

- Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$ et $\cos(\theta)$.
- En déduire que $S > 0$.
- Exprimer $\cos(2023\theta)$ et $\cos(6\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$ et $\cos(\theta)$.
- Linéariser S^2 .
- En déduire que

$$S^2 + \frac{3}{2}S - 1 = 0.$$

- Déterminer la valeur de S .

Partie 3 : Valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et applications

- A l'aide des deux parties précédentes, montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
- En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
- Déterminer $\mathcal{S}_I$ l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions de l'inéquation

$$(I) \quad 2\cos(2x) + 4\sqrt{3}\sin(x)\cos(x) \leq 1 + \sqrt{5}.$$

Problème 3 - Bijection

On définit

$$f : \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2e^x + 3}{e^x + 1}. \end{array}$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. En déduire le tableau de variation complet de f .
3. Préciser le comportement asymptotique de f en $+\infty$.
4. Justifier que le graphe de f admet une tangente en 0 et préciser son équation.
5. Justifier que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble J à préciser.
6. Préciser le tableau de variation de f^{-1} sur J . Comment obtient-on le graphe de f^{-1} en fonction de celui de f ?
7. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et exprimer pour tout $x \in J$, $(f^{-1})'(x)$ en fonction de $f^{-1}(x)$.
8. Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $f^2(x) - 5f(x) + 6$.
9. En déduire pour $x \in J$, une expression de $(f^{-1})'(x)$ en fonction de x .
10. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in J, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2}.$$

11. En déduire f^{-1} .
12. Retrouver le résultat précédent par une autre méthode.