Epreuve de mathématiques 10
2023-2024

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

lycée Raoul Follereau

Problème 1 - Variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel est défini toutes les variables aléatoires de ce problème. Une puce se promène sur $\mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n sa position à l'étape n. On suppose :

- à l'étape 0, la puce démarre à l'origine : $S_0 = 0$,
- à chaque étape $n \in \mathbb{N}^*$: la puce augmente de 1 sa position avec une probabilité $p \in \,]0;1[$ et diminue de 1 sa position avec une probabilité $1-p$ et ce choix de monter ou descendre ne dépend pas des précédents sauts.

Partie 1 : Lois initiales

1. Préciser la loi de S_1.
2. (a) Préciser l'univers image de S_2 et de S_3.

   (b) Donner pour tout $n \in \mathbb{N}$, sans justification, l'univers image de S_{2n} et S_{2n+1}.
3. Déterminer la loi conjointe (S_1, S_2).
4. En déduire la loi marginale de S_2.
5. Calculer $\mathbb{E}(S_2)$ et $\mathbb{V}(S_2)$.
6. Calculer $\mathrm{Cov}(S_1, S_2)$.
7. Les variables aléatoires S_1 et S_2 sont-elles indépendantes ?
8. Calculer $\mathbb{P}(S_3 = 1)$.
9. Calculer $\mathbb{P}(S_2 = 0 \mid S_3 = 1)$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}(S_n = n)$.

Partie 2 : Probabilité de retour à l'origine

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $X_n = S_n - S_{n-1}$ le déplacement de la puce à l'étape n. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \frac{X_n+1}{2}$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

11. Montrer que T_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
12. Exprimer S_n en fonction de n et T_n.
13. En déduire $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{V}(S_n)$ et préciser suivant la parité de n, $\mathbb{P}(S_n = 0)$.
14. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(|S_n - n(2p-1)| \geqslant n^{3/4}\right) = 0$.
15. En déduire pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(S_n \geqslant (1+\varepsilon)\, n\,(2p-1))$.
16. Préciser la loi de S_4.

On admet dans la suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} (p(1-p))^n$.

Partie 3 : Les deux premiers indicateurs de retour à l'origine

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $U_k = \begin{cases} 1 \text{ si } S_{2k} = 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$.

17. Reconnaitre les lois de U_1 et U_2. On précisera la valeur des paramètres en fonction de p.
18. Justifier sans calcul que la loi conditionnelle de S_4 sachant $(U_1 = 1)$ est la même loi que celle de S_2.
19. En déduire la loi conjointe de U_1 et U_2.
20. Les variables aléatoires U_1 et U_2 sont-elles indépendantes ?

Partie 4 : Une égalité algébrique

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. On admet le résultat suivant :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

21. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que f admet un développement limité à l'ordre n en 0. On le note $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$ avec $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
22. En appliquant la formule d'un développement limité usuel, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}.$$
23. Montrer que pour tout $x \in \left]-1;1\right[$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ converge.

On admet dans la suite le résultat suivant :

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k}{k}\frac{x^k}{2^{2k}} \qquad (\bigstar).$$

Partie 5 : Nombre de passages à l'origine

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$.

24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pourquoi V_n ne suit pas une loi binomiale a priori ?
25. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(V_n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}(p(1-p))^k.$$
26. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$. A l'aide de la relation $(\bigstar)$, déterminer $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(V_n)$.
27. On suppose que $p = \frac{1}{2}$.
   (a) Montrer par récurrence que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(V_n) = \binom{2n}{n}\frac{2n+1}{2^{2n}}.$$
   (b) En déduire $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(V_n)$.

Problème 2 - Géométrie

On se place dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}$: $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Partie 1 : Plan tangent à une sphère

Dans cette partie, on considère l'ensemble S d'équation cartésienne :

$$x^2 - 2x + y^2 + z^2 - 2y + \frac{3}{2} = 0.$$

1. Montrer que S est une sphère, donner son centre Ω et son rayon.
2. Soit, pour $\theta \in [0; 2\pi]$, la droite D_θ : $\begin{cases} x = t \\ y = t + \cos(\theta) \\ z = \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Donner un point et un vecteur directeur de cette droite D_θ.
3. Soit $\theta \in [0; 2\pi]$. Calculer les coordonnées de Ω_θ, le projeté orthogonal de Ω sur D_θ.

   Un dessin sera apprécié, on pourra admettre dans la suite que $\Omega_\theta = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\cos(\theta)}{2} \\ 1 + \frac{\cos(\theta)}{2} \\ \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.
4. Montrer que $\Omega_\theta \in S$ et en déduire que D_θ est incluse dans le plan tangent à S en Ω_θ.
5. Donner une équation de ce plan.

Partie 2 : Etude d'un ensemble $\mathcal{C}$

Soit D une droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et soit M un point de l'espace.

6. Rappeler la formule donnant la norme du vecteur $\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}$.
7. En déduire que la distance du point M à la droite D est :

$$d(M, D) = \frac{\left\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

   Un dessin sera apprécié.

Soit D la droite de vecteur directeur $\vec{i} + \vec{j}$ et passant par l'origine. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points à distance $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de cette droite :

$$\mathcal{C} = \left\{ M(x, y, z) \,\middle|\, d(M, D) = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

8. Montrer que $M(x, y, z) \in \mathcal{C}$ si et seulement si $(x - y)^2 + 2z^2 = 1$.
9. Quelle est l'intersection de $\mathcal{C}$ avec la surface d'équation $z = 0$. On donnera une interprétation géométrique de ce résultat.
10. Plus généralement, quelle est l'intersection de $\mathcal{C}$ avec la surface d'équation $z = m$ où le paramètre m est un réel. On donnera une interprétation géométrique de ce résultat.
11. Montrer que $\forall \theta \in [0; 2\pi]$, $D_\theta \subset \mathcal{C}$.
12. Réciproquement, montrer que $\mathcal{C} \subset \bigcup_{\theta \in [0;2\pi]} D_\theta$.
13. Finalement, proposer un dessin de $\mathcal{C}$ et la position relative de S par rapport à $\mathcal{C}$