Corrigé du Devoir Surveillé 10
Variables aléatoires et géométrie

Problème I - Variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel est défini toutes les variables aléatoires de ce problème.
Une puce se promène sur $\mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n sa position à l'étape n. On suppose :

- à l'étape 0, la puce démarre à l'origine : $S_0 = 0$,
- à chaque étape $n \in \mathbb{N}^*$: la puce augmente de 1 sa position avec une probabilité $p \in]0;1[$ et diminue de 1 sa position avec une probabilité $1-p$ et ce choix de monter ou descendre ne dépend pas des précédents sauts.

Partie 1 : Lois initiales

1. Initialement, la puce se trouve en position $S_0 = 0$. A l'étape 1, ou elle augmente de 1 sa position : $S_1 = 1$ avec probabilité p ou elle diminue sa position de 1, $S_1 = -1$ avec une probabilité $1-p$. Ainsi,

$$\boxed{S_1(\Omega) = \{-1;1\}, \quad \mathbb{P}(S_1 = -1) = 1-p, \quad \mathbb{P}(S_1 = 1) = p.}$$

2. (a) Puisque $S_1(\Omega) = \{-1;1\}$ et que la puce peut ou augmenter ou diminuer de 1 sa position,

$$\boxed{S_2(\Omega) = \{-2;0;2\}.}$$

Puis,

$$\boxed{S_3(\Omega) = \{-3;-1;1;3\}.}$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{S_{2n} = \{2k \in \mathbb{Z} \mid k \in [\![-n;n]\!]\} \quad \text{et} \quad S_{2n+1} = \{2k+1 \in \mathbb{Z} \mid k \in [\![-n;n]\!]\} \cup \{-2n-1\}.}$$

3. Par la question 2.a on a $(S_1, S_2)(\Omega) = \{-1;1\} \times \{-2;0;2\}$. L'évènement $(S_1 = -1, S_2 = -2)$ correspond à l'évènement : « la puce diminue sa position de 1 à l'étape 1 et diminue sa position à l'étape 2 ». On a

$$\mathbb{P}(S_1 = -1, S_2 = -2) = \mathbb{P}(S_2 = -2 \mid S_1 = -1)\, \mathbb{P}(S_1 = -1).$$

Par construction, $\mathbb{P}(S_1 = -1) = 1-p$. De même, $(S_2 = -2 \mid S_1 = -1)$ correspond à l'évènement la puce descend d'une position : $\mathbb{P}(S_2 = -2 \mid S_1 = -1) = 1-p$. D'où,

$$\mathbb{P}(S_1 = -1, S_2 = -2) = (1-p)^2.$$

D'autre part, $\mathbb{P}(S_1 = 1, S_2 = -2) = \mathbb{P}(S_2 = -2 \mid S_1 = 1)\, \mathbb{P}(S_1 = 1)$. Or $(S_2 = -2 \mid S_1 = 1)$ correspond à l'évènement la puce saute de la position 1 à la position -2. La puce est sportive mais ne sait pas faire des bonds aussi grands. Donc $\mathbb{P}(S_1 = 1, S_2 = -2) = 0$. De même, on obtient,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_1 = -1, S_2 = 0) &= \mathbb{P}(S_2 = 0 \mid S_1 = -1)\, \mathbb{P}(S_1 = -1) = p(1-p) \\
\mathbb{P}(S_1 = 1, S_2 = 0) &= \mathbb{P}(S_2 = 0 \mid S_1 = 1)\, \mathbb{P}(S_1 = 1) = (1-p)\,p \\
\mathbb{P}(S_1 = -1, S_2 = 2) &= \mathbb{P}(S_2 = 2 \mid S_1 = -1)\, \mathbb{P}(S_1 = -1) = 0 \\
\mathbb{P}(S_1 = 1, S_2 = 2) &= \mathbb{P}(S_2 = 2 \mid S_1 = 1)\, \mathbb{P}(S_1 = 1) = p^2.
\end{aligned}$$

Conclusion, la loi conjointe de (S_1, S_2) est donnée par

$S_1 \backslash S_2$	-2	0	2
-1	$(1-p)^2$	$p(1-p)$	0
1	0	$p(1-p)$	p^2

4. La famille $((S_1=-1),(S_1=1))$ forme un système complet d'évènements. Par la formule des probabilités totales,
$$\mathbb{P}(S_2=2)=\mathbb{P}(S_2=2,S_1=-1)+\mathbb{P}(S_2=2,S_1=1)=0+p^2 \qquad \text{par la question précédente.}$$
De même,
$$\mathbb{P}(S_2=0)=\mathbb{P}(S_2=0,S_1=-1)+\mathbb{P}(S_2=0,S_1=1)=2p(1-p)$$
$$\mathbb{P}(S_2=-2)=\mathbb{P}(S_2=-2,S_1=-1)+\mathbb{P}(S_2=-2,S_1=1)=(1-p)^2.$$
Conclusion, la loi marginale de S_2 est donnée par

k	-2	0	2
$\mathbb{P}(S_2=k)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

5. Par définition,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_2)&=-2\mathbb{P}(S_2=-2)+0\times\mathbb{P}(S_2=0)+2\mathbb{P}(S_2=2)\\&=-2(1-p)^2+2p^2 \qquad \text{par la question précédente}\\&=2(p-1+p)(p+1-p)\\&=2(2p-1).\end{aligned}$$
De plus, par la formule de Koenig-Huygens,
$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S_2)&=\mathbb{E}\left(S_2^2\right)-\mathbb{E}(S_2)^2\\&=(-2)^2\mathbb{P}(S_2=-2)+0^2+2^2\mathbb{P}(S_2=2)-4(2p-1)^2 \qquad \text{par le théorème de transfert}\\&=4(1-p)^2+4p^2-4(2p-1)^2\\&=4\left(1-2p+p^2+p^2-4p^2+4p-1\right)\\&=4\left(2p-2p^2\right)\\&=8p(1-p).\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{E}(S_2)=2(2p-1), \qquad \mathbb{V}(S_2)=8p(1-p).}$$

6. Par définition,
$$\mathrm{Cov}(S_1,S_2)=\mathbb{E}(S_1S_2)-\mathbb{E}(S_1)\mathbb{E}(S_2).$$
Par le théorème de transfert,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_1S_2)=&(-1)\times(-2)\mathbb{P}(S_1=-1,S_2=-2)+0+(-1)\times 2\mathbb{P}(S_1=-1,S_2=2)\\&+1\times(-2)\mathbb{P}(S_1=1,S_2=2)+0+1\times 2\mathbb{P}(S_1=1,S_2=2)\\=&2(1-p)^2-0-0+2p^2\end{aligned}$$
De plus, par la question précédente, $\mathbb{E}(S_2)=2(2p-1)$ et
$$\mathbb{E}(S_1)=-1\times\mathbb{P}(S_1=-1)+1\times\mathbb{P}(S_1=1)=-(1-p)+p=2p-1.$$

D'où,

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(S_1, S_2) &= 2(1-p)^2 + 2p^2 - 2(2p-1)(2p-1)\\ &= 2\left(1 - 2p + p^2 + p^2 - 4p^2 + 4p - 1\right)\\ &= 2\left(-2p^2 + 2p\right) = 4p(1-p).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Cov}(S_1, S_2) = 4p(1-p).}$$

7. Puisque $p \in]0;1[$, $p \neq 0$ et $1-p \neq 0$. Donc par la question précédente, $\operatorname{Cov}(S_1, S_2) = 4p(1-p) \neq 0$. Nécessairement (la réciproque est fausse),

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } S_1 \text{ et } S_2 \text{ se sont pas indépendantes.}}$$

8. La famille $((S_2 = -2), (S_2 = 0), (S_2 = 2))$ forme un système complet d'évènements. Par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_3 = 1) = \mathbb{P}(S_3 = 1 \mid S_2 = -2)\,\mathbb{P}(S_2 = -2) + \mathbb{P}(S_3 = 1 \mid S_2 = 0)\,\mathbb{P}(S_2 = 0)\\ + \mathbb{P}(S_3 = 1 \mid S_2 = 2)\,\mathbb{P}(S_2 = 2).\end{aligned}$$

La puce ne peut pas passer de -2 à 1, $\mathbb{P}(S_3 = 1 \mid S_2 = -2) = 0$. Pour passer de 0 à 1, elle doit monter d'une position : $\mathbb{P}(S_3 = 1 \mid S_2 = 0) = p$ et au contraire pour passer de 2 à 1 elle doit descendre d'une position : $\mathbb{P}(S_3 = 1 \mid S_2 = 2) = 1-p$. Donc par la question 4.

$$\mathbb{P}(S_3 = 1) = 0 + p2p(1-p) + (1-p)p^2 = 3p^2(1-p).$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(S_3 = 1) = 3p^2(1-p).}$$

9. Par la question précédente, $\mathbb{P}(S_3 = 1) \neq 0$. Donc par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(S_2 = 0 \mid S_3 = 1) = \frac{\mathbb{P}(S_3 = 1 \mid S_2 = 0)\,\mathbb{P}(S_2 = 0)}{\mathbb{P}(S_3 = 1)}.$$

Comme vu à la question précédente, $\mathbb{P}(S_3 = 1 \mid S_2 = 0) = p$, $\mathbb{P}(S_2 = 0) = 2p(1-p)$ et $\mathbb{P}(S_3 = 1) = 3p^2(1-p)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(S_2 = 0 \mid S_3 = 1) = \frac{2p^2(1-p)}{3p^2(1-p)} = \frac{2}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(S_2 = 0 \mid S_3 = 1) = \frac{2}{3}.}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. On observe que pour venir en position n, à l'étape n, la puce ne doit faire que monter :

$$(S_n = n) = \bigcap_{k \in [\![0;n]\!]} (S_k = k)$$

Par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = n) &= \mathbb{P}\left(S_n = n \;\middle|\; \bigcap_{k \in [\![0;n-1]\!]} (S_k = k)\right) \times \cdots \times \mathbb{P}(S_1 = 1 \mid S_0 = 0)\,\mathbb{P}(S_0 = 0)\\ &= \mathbb{P}(S_n = n \mid S_{n-1} = n-1) \times \cdots \times \mathbb{P}(S_1 = 1) \times 1\\ &= \underbrace{p \times \cdots \times p}_{n \text{ fois}}\\ &= p^n.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n = n) = p^n.}$$

Partie 2 : Probabilité de retour à l'origine

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $X_n = S_n - S_{n-1}$ le déplacement de la puce à l'étape n. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \frac{X_n+1}{2}$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

11. Par définition, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k(\Omega) = \{-1; 1\}$ et $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p$. Donc on a
$$Y_k(\Omega) = \left\{\frac{-1+1}{2}; \frac{1+1}{2}\right\} = \{0; 1\}.$$
Donc Y_k suit une loi de Bernoulli et
$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}\left(\frac{X_k+1}{2} = 1\right) = \mathbb{P}(X_k = 1) = p.$$
Donc
$$\forall k \mathbb{N}^*, \quad Y_k \sim \mathscr{B}(p).$$
De plus, on suppose les sauts de la puce indépendants les uns des autres. Donc T_n est la somme de n variables aléatoires de même loi de Bernoulli et indépendantes. Conclusion,
$$\boxed{T_n \sim \mathscr{B}(n, p).}$$

12. On a
$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{n} Y_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k+1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} X_k + \frac{n}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (S_k - S_{k-1}) + \frac{n}{2} \\
&= \frac{S_n - S_0}{2} + \frac{n}{2} \qquad \text{car on reconnait une somme télescopique} \\
&= \frac{S_n + n}{2}.
\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{S_n = 2T_n - n.}$$

13. Par la question précédente et la linéarité de l'espérance :
$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(2T_n - n) = 2\mathbb{E}(T_n) - n = 2np - n = n(2p-1) \qquad \text{car } T_n \sim \mathscr{B}(n, p).$$
De plus,
$$\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}(2T_n - n) = 4\mathbb{V}(T_n) = 4np(1-p) \qquad \text{car } T_n \sim \mathscr{B}(n, p).$$
Enfin,
$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}(2T_n - n = 0) = \mathbb{P}\left(T_n = \frac{n}{2}\right).$$
Or $T_n \sim \mathscr{B}(n, p)$, donc si n est impair, $\frac{n}{2} \notin [\![0; n]\!]$ et donc $\mathbb{P}\left(T_n = \frac{n}{2}\right)$. Tandis que si n est pair, $\frac{n}{2} \in [\![0; n]\!]$ donc
$$\mathbb{P}\left(T_n = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} (1-p)^{n-\frac{n}{2}} = \binom{n}{\frac{n}{2}} (p(1-p))^{\frac{n}{2}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = n(2p-1), \qquad \mathbb{V}(S_n) = 4np(1-p)}$$

et

$$\boxed{\mathbb{P}\left(T_n = \frac{n}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \binom{n}{\frac{n}{2}}(p(1-p))^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}}$$

14. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la question précédente,

$$\mathbb{P}\left(|S_n - n(2p-1)| \geqslant n^{3/4}\right) = \mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant n^{3/4}\right).$$

Donc par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant n^{3/4}\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n^{3/2}} = \frac{4np(1-p)}{n^{3/2}} = \frac{4p(1-p)}{\sqrt{n}}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4p(1-p)}{\sqrt{n}} = 0$, par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|S_n - n(2p-1)| \geqslant n^{3/4}\right) = 0.}$$

15. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$(S_n \geqslant (1+\varepsilon)\, n(2p-1)) = (S_n - n(2p-1) \geqslant \varepsilon\, n(2p-1)).$$

On observe que $n^{3/4} \underset{n\to+\infty}{\ll} \varepsilon\, n(2p-1)$. Donc pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$n^{3/4} \leqslant \varepsilon\, n(2p-1).$$

Donc, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} (S_n \geqslant (1+\varepsilon)\, n(2p-1)) &= (S_n - n(2p-1) \geqslant \varepsilon\, n(2p-1)) \\ &\subset (|S_n - n(2p-1)| \geqslant \varepsilon\, n(2p-1)) \\ &\subset \left(|S_n - n(2p-1)| \geqslant n^{3/4}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad 0 \leqslant \mathbb{P}(S_n \geqslant (1+\varepsilon)\, n(2p-1)) \leqslant \mathbb{P}\left(|S_n - n(2p-1)| \geqslant n^{3/4}\right).$$

Donc par la question précédente et le théorème d'encadrement, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n \geqslant (1+\varepsilon)\, n(2p-1)).}$$

16. Par la question 2.b on sait que $S_4(\Omega) = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$. De plus, par la question 12. $S_4 = 2T_4 - 4$ et par la question 13. $T_4 \sim \mathscr{B}(4, p)$. Donc

$$\mathbb{P}(S_4 = -4) = \mathbb{P}(2T_4 - 4 = -4) = \mathbb{P}(T_4 = 0) = \binom{4}{0} p^0 (1-p)^4 = (1-p)^4.$$

De même, pour les autres probabilités :

k	-4	-2	0	2	4
$\mathbb{P}(S_4 = k)$	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	p^4

On admet dans la suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}(p(1-p))^n$.

Partie 3 : Les deux premiers indicateurs de retour à l'origine

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $U_k = \begin{cases} 1 \text{ si } S_{2k} = 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$.

17. Par définition, $U_1(\Omega) = U_2(\Omega) = \{0, 1\}$. Donc U_1 et U_2 suivent des lois de Bernoulli. De plus,
$$\mathbb{P}(U_1 = 1) = \mathbb{P}(S_2 = 0).$$
Donc par la question 4. $\mathbb{P}(U_1 = 1) = 2p(1-p)$. De même, par la question 16.
$$\mathbb{P}(U_2 = 1) = \mathbb{P}(S_4 = 0) = 6p^2(1-p)^2.$$
Conclusion,
$$\boxed{U_1 \sim \mathscr{B}(2p(1-p)), \qquad U_2 \sim \mathscr{B}\left(6p^2(1-p)^2\right).}$$

18. Si $(U_1 = 1)$ est réalisé alors $(S_2 = 0)$ est réalisé. Donc la puce se trouve à l'étape 2 à l'origine. Elle repart alors se promener avec le même protocole. Tout se passe donc comme si la puce venait de démarrer sa promenade, il suffit de décaler les indices (de relancer le chronomètre) de 2 :
$$\boxed{\text{la loi conditionnelle de } S_4 \text{ sachant } (U_1 = 1) \text{ est la même loi que celle de } S_2.}$$

19. Calculons,
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U_1 = 1, U_2 = 1) &= \mathbb{P}(U_2 = 1 \mid U_1 = 1)\,\mathbb{P}(U_1 = 1) \\
&= \mathbb{P}(S_2 = 0 \mid U_1 = 1)\,\mathbb{P}(U_1 = 1) \\
&= \mathbb{P}(S_2 = 0)\,\mathbb{P}(U_1 = 1) \qquad \text{par la question précédente} \\
&= 2p(1-p)\,\mathbb{P}(U_1 = 1) \qquad \text{par la question 4.} \\
&= 4p^2(1-p)^2 \qquad \text{par la question 17.}
\end{aligned}$$
De même,
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U_1 = 1, U_2 = 0) &= \mathbb{P}(U_2 = 0 \mid U_1 = 1)\,\mathbb{P}(U_1 = 1) \\
&= (1 - \mathbb{P}(U_2 = 1 \mid U_1 = 1))\,2p(1-p) \\
&= (1 - 2p(1-p))\,2p(1-p) \\
&= 2p(1-p)\left(1 - 2p + 2p^2\right).
\end{aligned}$$
De plus, $((U_1 = 0), (U_1 = 0))$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales :
$$\mathbb{P}(U_2 = 1) = \mathbb{P}(U_1 = 0, U_2 = 1) + \mathbb{P}(U_1 = 1, U_2 = 1)$$
D'où
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U_1 = 0, U_2 = 1) &= \mathbb{P}(U_2 = 1) - \mathbb{P}(U_1 = 1, U_2 = 1) \\
&= \mathbb{P}(U_2 = 1) - 4p^2(1-p)^2 \\
&= 2p(1-p) - 4p^2(1-p)^2 \qquad \text{par la question 17.} \\
&= 2p(1-p)\left(1 - 2p + 2p^2\right).
\end{aligned}$$
Enfin,
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U_1 = 0, U_2 = 0) &= \mathbb{P}(U_2 = 0) - \mathbb{P}(U_1 = 1, U_2 = 0) \\
&= 1 - 2p(1-p) - 2p(1-p)\left(1 - 2p + 2p^2\right) \\
&= 1 - 2p + 2p^2 - 2p(1-p)\left(1 - 2p + 2p^2\right) \\
&= \left(1 - 2p + 2p^2\right)\left(1 - 2p + 2p^2\right) \\
&= \left(1 - 2p + 2p^2\right)^2.
\end{aligned}$$
Conclusion,

$U_1 \backslash U_2$	0	1
0	$\left(1-2p+2p^2\right)^2$	$2p\,(1-p)\left(1-2p+2p^2\right).$
1	$2p\,(1-p)\left(1-2p+2p^2\right)$	$4p^2\,(1-p)^2$

20. Par la question précédente, $\mathbb{P}\,(U_1=1,U_2=1)=4p^2\,(1-p)^2$. D'autre part, par la question 17.

$$\mathbb{P}\,(U_1=1)\,\mathbb{P}\,(U_2=1)=2p\,(1-p)\times 6p^2\,(1-p)^2=12p^3\,(1-p)^3\,.$$

Puisque $p\neq 0$ et $1-p\neq 0$, on a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\,(U_1=1,U_2=1)=\mathbb{P}\,(U_1=1)\,\mathbb{P}\,(U_2=1) \quad &\Leftrightarrow \quad 4p^2\,(1-p)^2=12p^3\,(1-p)^3\\ &\Leftrightarrow \quad 1=3p\,(1-p)\\ &\Leftrightarrow \quad 3p^2-3p+1=0.\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé, $\Delta=9-12<0$.

Nécessairement, $\mathbb{P}\,(U_1=1,U_2=1)\neq\mathbb{P}\,(U_1=1)\,\mathbb{P}\,(U_2=1)$. Conclusion,

$$\boxed{U_1 \text{ et } U_2 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Partie 4 : Une égalité algébrique

Soit $f:x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. On admet le résultat suivant :

$$n!\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

21. Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction f est $\mathscr{C}^n$ sur $]-\infty;1[$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc par le théorème de Taylor-Young,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet un développement limité d'ordre } n \text{ en } 0.}$$

On le note $f(x)\underset{x\to 0}{=}a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+o\,(x^n)$ avec $(a_0,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$.

22. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On sait que

$$(1+u)^\alpha\underset{u\to 0}{=}1+\alpha u+\frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2}u^2+\cdots+\frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n+o\,(u^n)\,.$$

Donc en prenant $\alpha=-1/2$ et $u=-x\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$,

$$\begin{aligned}f(x)&\underset{x\to 0}{=}1-\frac{-x}{2}+\frac{(-1/2)(-3/2)}{2}x^2-\frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{3!}x^3+\ldots\\&\qquad+(-1)^n\frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)\cdots(1/2-n-1)}{n!}x^n+o\,(x^n)\\&\underset{x\to 0}{=}1+\frac{x}{2}+\frac{3}{2^3}x^2+\frac{1\times3\times5}{3!2^3}x^3+\ldots\\&\qquad+\frac{(1)(3)(5)\cdots(2n-1)}{n!2^n}x^n+o\,(x^n)\,.\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(1)(3)(5)\cdots(2n-1)}{n!2^n} \\ &= \frac{(1)(2)(3)(4)(5)\cdots(2n)\,(2n-1)\,(2n)}{n!2^n \times (2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n)} \\ &= \frac{(2n)!}{n!2^n \times 2^n \times (1\times 2\times 3\times\cdots\times n)} \\ &= \frac{(2n)!}{n!2^{2n}n!} \end{aligned}$$

Or $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!(n)!}$, alors,

$$a_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}.$$

Si $n=0$, $\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} = 1 = a_0$, le résultat reste vrai. Conclusion,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}.}$$

23. Soit $x\in\,]-1;1[$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2\,2^{2n}}x^n.$$

Or $p! \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi p}\left(\frac{p}{\mathrm{e}}\right)^p$ donc

$$\begin{aligned} a_nx^n &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\right)^2 2^{2n}}x^n \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{(2\pi n)\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}2^{2n}}x^n \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}2^{2n}}x^n \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^n}{\sqrt{\pi n}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|a_nx^n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|x|^n}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(|x|^n\right).$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}}|x|^n$ converge absolument en tant que série géométrique de raison x, $|x|<1$. Donc par le théorème de domination, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{|x|^n}{\sqrt{\pi n}}$ converge absolument donc converge. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|\geqslant 0$. Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|$ converge. Autrement dit, $\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_nx^n|$ converge absolument donc converge. Conclusion,

$$\boxed{\forall x\in\,]-1;1[\,,\qquad \sum_{n\in\mathbb{N}}a_nx^n \text{ converge.}}$$

On admet dans la suite le résultat suivant :

$$\forall x\in\,]-1;1[\,,\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{2^{2n}}\qquad (\bigstar).$$

Partie 5 : Nombre de passages à l'origine

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} U_k$.

24. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a vu à la question 20. que U_1 et U_2 ne sont pas indépendantes. La variable aléatoire V_n est donc bien une somme de variable aléatoire de Bernoulli mais non indépendantes (ni même de même paramètre) donc a priori,

$$\boxed{V_n \text{ n'est pas forcément une variable aléatoire de loi binomiale.}}$$

25. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(V_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n} U_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(U_k).$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, puisque $U_k(\Omega) = \{0; 1\}$, la variable U_k suit une loi de Bernoulli de paramètre,

$$\mathbb{P}(U_k = 1) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0) = u_k = \binom{2k}{k}(p(1-p))^k,$$

encore vrai si $k = 0$. Nécessairement,

$$\mathbb{E}(U_k) = u_k = \binom{2k}{k}(p(1-p))^k.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(V_n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}(p(1-p))^k.}$$

26. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente,

$$\mathbb{E}(V_n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}(4p(1-p))^k$$

Posons $x = 4p(1-p)$ et vérifions que $x \in]-1; 1[$. Soit $h : p \mapsto 4p(1-p)$. La fonction h est définie et même dérivable sur $[0; 1]$ et pour tout $p \in [0; 1]$,

$$h'(p) = 4(1-p-p) = 4(1-2p).$$

Donc pour $p \in [0; 1]$, $h'(p) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1-2p > 0 \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$. Donc h est strictement croissante sur $[0; 1/2]$ et de même strictement décroissante sur $[1/2; 1]$. Or $h(0) = 0 = h(1)$ et $h\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1$:

x	0		$\frac{1}{2}$		1
h	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Donc pour tout $p \in]0; 1[\setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $h(p) < 1$. Ainsi $-1 < 0 \leqslant x = 4(1-2p) < 1$ pour tout $p \in]0; 1[\setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Donc par ($\bigstar$), $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(V_n)$ existe et

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(V_n) = \frac{1}{\sqrt{1-4(1-2p)}}.}$$

27. On suppose que $p = \frac{1}{2}$.

   (a) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(n) : « \mathbb{E}(V_n) = \binom{2n}{n} \frac{2n+1}{2^{2n}}. »$$

   Procédons par récurrence.
   Initialisation. Si $n = 0$, alors $\mathbb{E}(V_0) = \mathbb{E}(U_0) = \mathbb{E}(1) = 1$. Or $\binom{2n}{n}\frac{2n+1}{2^{2n}} = 1 \times \frac{1}{2^0} = 1$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Par linéarité, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(V_{n+1}) &= \mathbb{E}(V_n + U_{n+1}) \\
&= \mathbb{E}(V_n) + \mathbb{E}(U_{n+1}) \\
&= \binom{2n}{n}\frac{2n+1}{2^{2n}} + \mathbb{E}(U_{n+1}) \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \binom{2n}{n}\frac{2n+1}{2^{2n}} + u_{n+1} \qquad \text{car } U_{n+1} \sim \mathscr{B}(u_{n+1}) \\
&= \binom{2n}{n}\frac{2n+1}{2^{2n}} + \binom{2n+2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right)^{n+1} \qquad \text{car } p = \frac{1}{2} \\
&= \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{2n+1}{2^{2n}} + \binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{2n+2}} \\
&= \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}\frac{2n+1}{2^{2n+2}} \times 4 + \binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{2n+2}} \\
&= \binom{2n+2}{n+1}\frac{(n+1)^2}{2(n+1)}\frac{1}{2^{2n+2}} \times 4 + \binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{2n+2}} \\
&= \binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{2n+2}}(2(n+1)+1) \\
&= \binom{2n+2}{n+1}\frac{2n+3}{2^{2n+2}}
\end{aligned}$$

   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie.
   Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(V_n) = \binom{2n}{n}\frac{2n+1}{2^{2n}}.}$$

   (b) Par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(V_n) = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{2n+1}{2^{2n}}.$$

   Donc d'après l'équivalent de $n!$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(V_n) &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n}}\frac{2n+1}{2^{2n}} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}2^{2n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n}\frac{2n+1}{2^{2n}} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}(2n+1)\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n}.
\end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2}\,(2n+1)\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n = +\infty$. Conclusion, lorsque $p = \frac{1}{2}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(V_n) = +\infty.$$

Lorsque la marche aléatoire est centrée : $p = \frac{1}{2}$, alors la puce passe une infinité de fois par l'origine c'est ce que souligne la dernière question. Tandis que si la marche aléatoire est avec une dérive : $p > 1/2$ (la puce a davantage tendance à monter) ou $p < 1/2$ (davantage tendance a descendre) alors la puce va passer un nombre fini de fois par l'origine, et donc son nombre moyen de passages tend vers une valeur finie (question 26.).

Problème II - Géométrie

On se place dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} : \left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Partie 1 : Plan tangent à une sphère

Dans cette partie, on considère l'ensemble S d'équation cartésienne :

$$x^2 - 2x + y^2 + z^2 - 2y + \frac{3}{2} = 0.$$

1. L'équation peut s'écrire :

$$(x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 + z^2 + \frac{3}{2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{1}{2}.$$

Conclusion, on reconnait l'équation de

$$\boxed{\text{la sphère de centre } \Omega(1,1,0) \text{ et de rayon } \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

2. θ est fixé donc il faut « lire » correctement cette équation :

$$\boxed{M_\theta\left(0, \cos(\theta), \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}}\right) \text{ est un point de } D_\theta \text{ et } \vec{u} : (1,1,0) \text{ un vecteur directeur.}}$$

3. *Méthode 1.* Puisque $M_\theta \in D_\theta$, et que $\vec{u}$ est un vecteur directeur, on a

$$\begin{aligned}
\Omega_\theta &= M_\theta + p_{\vec{u}}(M_\theta) \\
&= M_\theta + \frac{\langle M_\theta\,\Omega, \vec{u}\rangle\,\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\theta) \\ \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1-\cos(\theta) \\ -\frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle}{1+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\theta) \\ \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \frac{2-\cos(\theta)}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2-\cos(\theta)}{2} \\ \frac{2+\cos(\theta)}{2} \\ \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Le point } \Omega_\theta \text{ a donc pour coordonnées } \left(\frac{2-\cos(\theta)}{2}, \frac{2+\cos(\theta)}{2}, \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}}\right).}$$

Méthode 2. Si on note (x, y, z) les coordonnées de Ω_θ alors on doit avoir $\Omega_\theta \in D_\theta$ et $\overrightarrow{\Omega\Omega_\theta}$ orthogonal à $\vec{u}$ soit $\left\langle \overrightarrow{\Omega\Omega_\theta}, \vec{u} \right\rangle = 0$.

La deuxième relation donne $x - 1 + y - 1 = 0$ soit $x + y = 2$. Or on a aussi $\begin{cases} x = t \\ y = t + \cos(\theta) \\ z = \sin(\theta)\sqrt{2} \end{cases}$. soit en injectant la première équation dans la deuxième : $y = x + \cos(\theta)$. On tire donc de ces deux équations : $2y = 2 + \cos(\theta)$ soit $y = 1 + \cos(\theta)2$ et donc $x = 1 - \cos(\theta)2$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Le point } \Omega_\theta \text{ a donc pour coordonnées } \left(\frac{2-\cos(\theta)}{2}, \frac{2+\cos(\theta)}{2}, \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}}\right).}$$

4. Pour la première partie de la question, il suffit d'injecter les coordonnées du point dans l'équation de la sphère :

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \cos^2(\theta)4 + \cos^2(\theta)4 + \sin^2(\theta)2 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)2 = 12.$$

Conclusion,

$$\boxed{\Omega_\theta \in S.}$$

Ensuite, un peu de géométrie, vous verrez l'année prochaine comment obtenir directement l'équation du plan tangent à une surface (ici la sphère), mais pour le moment, le plan tangent à la sphère en un point M est celui qui passe par M et qui admet comme vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$. Or ici par construction le vecteur directeur de D_θ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\Omega\Omega_\theta}$ donc cette droite est dans le plan passant par Ω_θ et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega\Omega_\theta}$. Conclusion,

$$\boxed{D_\theta \text{ est incluse dans le plan tangent à } S \text{ en } \Omega_\theta.}$$

5. Là encore préférez la technique « jolie » : en notant P le plan cherchée et $M(x, y, z) \in \mathscr{E}$.

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in P \quad &\Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{\Omega\Omega_\theta}, \overrightarrow{M\Omega_\theta} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{-\cos(\theta)}{2}\left(x - 1 + \frac{\cos(\theta)}{2}\right) + \frac{\cos(\theta)}{2}\left(y - 1 - \frac{\cos(\theta)}{2}\right) \\ &\qquad + \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}}\left(z - \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{\cos(\theta)}{2}(y-x) + \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}} z - 12 = 0.}$$

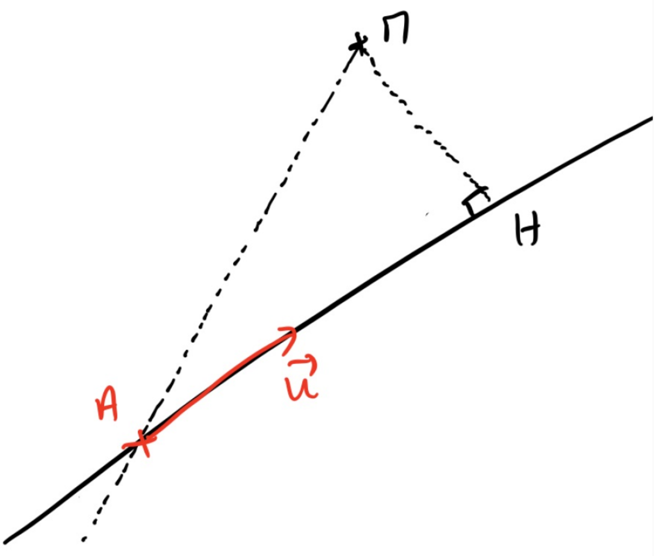
Partie 2 : Etude d'un ensemble $\mathcal{C}$

Soit D une droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et soit M un point de l'espace.

6. D'après le cours,

$$\boxed{\left\| \vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} \right\| = \|\vec{u}\| . \left\|\overrightarrow{AM}\right\| . \left|\sin\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right)\right|.}$$

7. Voici une représentation de la situation :



On cherche donc la distance MH où H est le projeté de M sur la droite. Or $MH = AM\left|\sin\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right)\right|$ donc d'après la question précédente : $MH = \frac{\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$. Conclusion,

$$\boxed{d(M, D) = \frac{\left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM}\right\|}{\|\vec{u}\|}.}$$

Soit D la droite de vecteur directeur $\vec{i} + \vec{j}$ et passant par l'origine. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points à distance $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de cette droite :

$$\mathcal{C} = \left\{ M(x, y, z) \;\middle|\; d(M, D) = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

8. On applique la formule précédente (même si on n'a pas réussi à la démontrer) avec $A = O$ et $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$:

$$\begin{aligned}
M(x, y, z) \in \mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\left\|\left(\vec{i}+\vec{j}\right)\wedge\overrightarrow{OM}\right\|}{\left\|\vec{i}+\vec{j}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\|(z, -z, y-x)\|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\Leftrightarrow \quad \|(z, -z, y-x)\|^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad z^2 + z^2 + (x-y)^2 = 1.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{M(x, y, z) \in \mathcal{C} \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)^2 + 2z^2 = 1.}$$

9. On fait l'intersection de deux surfaces, on obtient en général une courbe. Si $M(x, y, z)$ appartient à l'intersection de ces deux surfaces alors $z = 0$ et donc $(x-y)^2 = 1$. On obtient donc la réunion de deux droites : la droite d_1 : $\begin{cases} x - y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ et la droite d_2 : $\begin{cases} x - y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\mathscr{S} = d_1 \cup d_2.}$$

10. Si $M(x,y,z)$ est sur cette intersection $\mathcal{I}_m$, on a alors :

$$\begin{cases} (x-y)^2 + 2z^2 = 1 \\ z = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 1 - 2m^2 \\ z = m \end{cases}$$

Donc si $1 - 2m^2 < 0$ soit $m \in \left]-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$ alors l'intersection est vide. Si $2m^2 = 1$ alors on a la droite d_0 : $\begin{cases} x - y = 0 \\ z = m \end{cases}$. Sinon on a la réunion de deux droites : d_m : $\begin{cases} x - y = \sqrt{1-2m^2} \\ z = m \end{cases}$ et d'_m : $\begin{cases} x - y = -\sqrt{1-2m^2} \\ z = m \end{cases}$ Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{I}_m = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[\\ d_0 & \text{si } m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ d_m \cup d'_m & \text{si } m \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[\end{cases}.}$$

11. Attention à la rédaction, on n'injecte pas l'équation de la droite dans l'équation de $\mathcal{C}$ cela n'a pas de sens. Par contre soit $M(x,y,z) \in D_\theta$ alors $\exists t \in \mathbb{R}, x = t, y = t + \cos(\theta), z = \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}}$. On calcule donc $(x-y)^2 + 2z^2 = (\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = 1$. Donc $M \in \mathcal{C}$ et donc on a bien :

$$\boxed{\forall \theta \in [0, 2\pi], D_\theta \subset \mathcal{C}.}$$

12. Soit $M(x,y,z) \in \mathcal{C}$, alors $z \in [\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ car l'intersection de $\mathcal{C}$ avec les plans $z = m$ est vide en dehors de cet intervalle. Donc on peut écrire : $\exists \lambda \in [-1, 1], z = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ et donc $\exists \theta \in [0, 2\pi], z = \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2}}$. On a alors $(x-y)^2 = 1 - \sin(\theta)^2 = \cos^2(\theta)$. Donc

- soit $x - y = -\cos(\theta)$ et donc on peut poser $x = t$ et $y = t + \cos(\theta)$ donc $M \in D_\theta$.
- soit $x - y = \cos(\theta)$ et donc on peut poser $x = t$ et $y = t - \cos(\theta)$ donc $M \in D_{\pi-\theta} = D_{\theta'}$.

Dans tout les cas le point M est bien sur une des droites D_θ et donc on peut en conclure :

$$\boxed{\mathcal{C} \subset \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi]} D_\theta.}$$

13. L'ensemble des points de $\mathcal{C}$ sont les points à une distance fixe d'une droite... c'est donc un cylindre autour de l'axe $O + Vect\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$. De plus par la partie 1 la sphère est tangente à toutes les droites D_θ donc la sphère est tangente au cylindre.