Corrigé du Devoir Surveillé 1
Fonctions réelles, trigonométrie

Problème I - Fonctions réelles

On considère les fonctions suivantes :

$$g : \quad x \mapsto \frac{x^2+3}{x+1} \qquad \text{et} \qquad f : \quad x \mapsto x^2 - x + 4\ln(1+x).$$

Partie 1 : Etude de g

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$g(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad x+1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -1.$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est définie sur } \mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}.}$$

2. Puisque l'ensemble $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ n'est pas centré en 0 (car $1 \in \mathcal{D}$ et $-1 \notin \mathcal{D}$), on en déduit directement que
$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ n'est ni paire ni impaire.}}$$

3. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas et
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}, \qquad g'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+3)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}.$$
Conclusion, g est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}, \qquad g'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}.}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. On a
$$g'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+2x-3 > 0 \qquad \text{car } (x+1)^2 > 0 \text{ sur } \mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$
Soit Δ le discriminant associé, $\Delta = 4 - 4\times(-3) = 4(1+3) = 4^2$. Donc les racines associées sont $\frac{-2+4}{2} = 1$ et $\frac{-2-4}{2} = -3$. Ainsi,
$$g'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -3 \ \text{ OU } \ x > 1.$$
Conclusion,

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

5. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$, on a

$$g(x) = \frac{x^2}{x} \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = x \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty.$$

D'autre part,

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} x + 1 = 0^+ \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} x^2 + 3 = 4.$$

Donc par quotient,

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} g(x) = +\infty.$$

De même,

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} g(x) = -\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.}$$

6. Par la question 4. la fonction g est strictement croissante sur $]-\infty; -3]$, strictement décroissante sur $[-3; -1[$ et sur $]-1; 1]$ et enfin à nouveau strictement croissante sur $[1; +\infty[$. Nous avons déjà les limites en $-\infty$, -1^-, -1^+ et $+\infty$. Calculons donc $g(-3)$ et $g(1)$:

$$g(-3) = \frac{9+3}{-3+1} = \frac{12}{-2} = -6 \qquad \text{et} \qquad g(1) = \frac{1+3}{1+1} = 2.$$

Conclusion,

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

7. Par la question précédente, la fonction $\boxed{g \text{ admet un minimum local en } x = 1 \text{ qui vaut } 2}$.

8. Cependant la fonction g n'admet aucun minimum global. En effet, $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ ce qui implique que $\boxed{g \text{ n'est pas minorée et donc n'admet aucun minimum}}$.

9. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} g(x) = -\frac{21}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2+3}{x+1} = -\frac{21}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 6 = -21x - 21 \qquad \text{car } x \neq -1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 21x + 27 = 0. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé. On a

$$\Delta = 21^2 - 4 \times 2 \times 27 = 3^2 \times 7^2 - 8 \times 3 \times 3^2 = 3^2 (49 - 24) = 3^2 \times 25 = 3^2 \times 5^2.$$

Donc les racines associées sont $\frac{-21+15}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$ et $\frac{-21-15}{4} = -\frac{36}{4} = -9$. Conclusion, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$\boxed{g(x) = -\frac{21}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -9 \text{ OU } x = -\frac{3}{2}.}$$

10. On a $g(2) = \frac{4+3}{2+1} = \frac{7}{3}$. Donc par le tableau de variations de la question 6. on a

x	-1		1		2
g	‖	$+\infty$ ↘		↗ $\frac{7}{3}$	
	‖		2		

Conclusion,

$$\boxed{g\left(]-1;2[\right) = [2;+\infty[\,.}$$

D'autre part, par la question 9., on a $g(x) = -\frac{21}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -9$ OU $x = -\frac{3}{2}$. De même pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a les équivalences suivantes :

$$g(x) = -7 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+3}{x+1} = -7 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+3 = -7x-7 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+7x+10.$$

Soit Δ son discriminant, $\Delta = 49 - 40 = 9$. Donc les racines associées sont $\frac{-7+3}{2} = -2$ et $\frac{-7-3}{2} = -5$. Ainsi, toujours par la question 6.

x	$-\infty$		-9		-5		-3		-2		$-\frac{3}{2}$		-1		1		$+\infty$
g	$-\infty$	↗	$-\frac{21}{2}$	↗	-7	↗	-6	↘	-7	↘	$-\frac{21}{2}$	↘	$-\infty$	‖	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Conclusion,

$$\boxed{g^{\leftarrow}\left(\left[-\frac{21}{2};-7\right]\right) = [-9;-5] \cup \left[-2;-\frac{3}{2}\right].}$$

11. Par ce qui précède, on a (par exemple) $g(-5) = -\frac{21}{2} = g(-2)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ n'est pas injective.}}$$

12. Toujours par la question 6. on observe que tout élément y dans $]-6;2[$ n'admet aucun antécédent par la fonction g. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ n'est pas surjective.}}$$

13. Par la question 5. on a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$,

$$g(x) = x\frac{1+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

Calculons $g(x)/x$. On a

$$\forall x \mathbb{R} \setminus \{-1;0\}, \qquad \frac{g(x)}{x} = \frac{1+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}.$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 1.$$

Puis,

$$\forall x\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}, \qquad g(x)-x = \frac{x^2+3}{x+1} - x = \frac{x^2+3-x^2-x}{x+1} = \frac{-x+3}{x+1} = \frac{-x}{x}\frac{1-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -\frac{1-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}.$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)-x = -1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Le graphe de } g \text{ admet une asymptote en } +\infty \text{ d'équation } y = x-1.}$$

14. De même, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$. Puis

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

Et enfin,

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)-x = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Le graphe de } g \text{ admet la même asymptote } y = x-1 \text{ en } -\infty.}$$

15. Soit $h\in\mathbb{R}^*$. Alors $h\neq 0$ et donc $-1+h\neq -1$. De même $-h\neq 0$ donc $-1-h\neq -1$. Ainsi, $-1+h\in\mathcal{D}$ et $-1-h\in\mathcal{D}$. Donc

$$\boxed{\frac{g(-1+h)+g(-1-h)}{2} \text{ existe.}}$$

Puis, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{g(-1+h)+g(-1-h)}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{(-1+h)^2+3}{-1+h+1} + \frac{(-1-h)^2+3}{-1-h+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1-2h+h^2+3}{h} - \frac{1+2h+h^2+3}{h}\right)\\
&= \frac{h^2-2h+4-h^2-2h-4}{2h}\\
&= \frac{-4h}{2h}\\
&= -2.
\end{aligned}$$

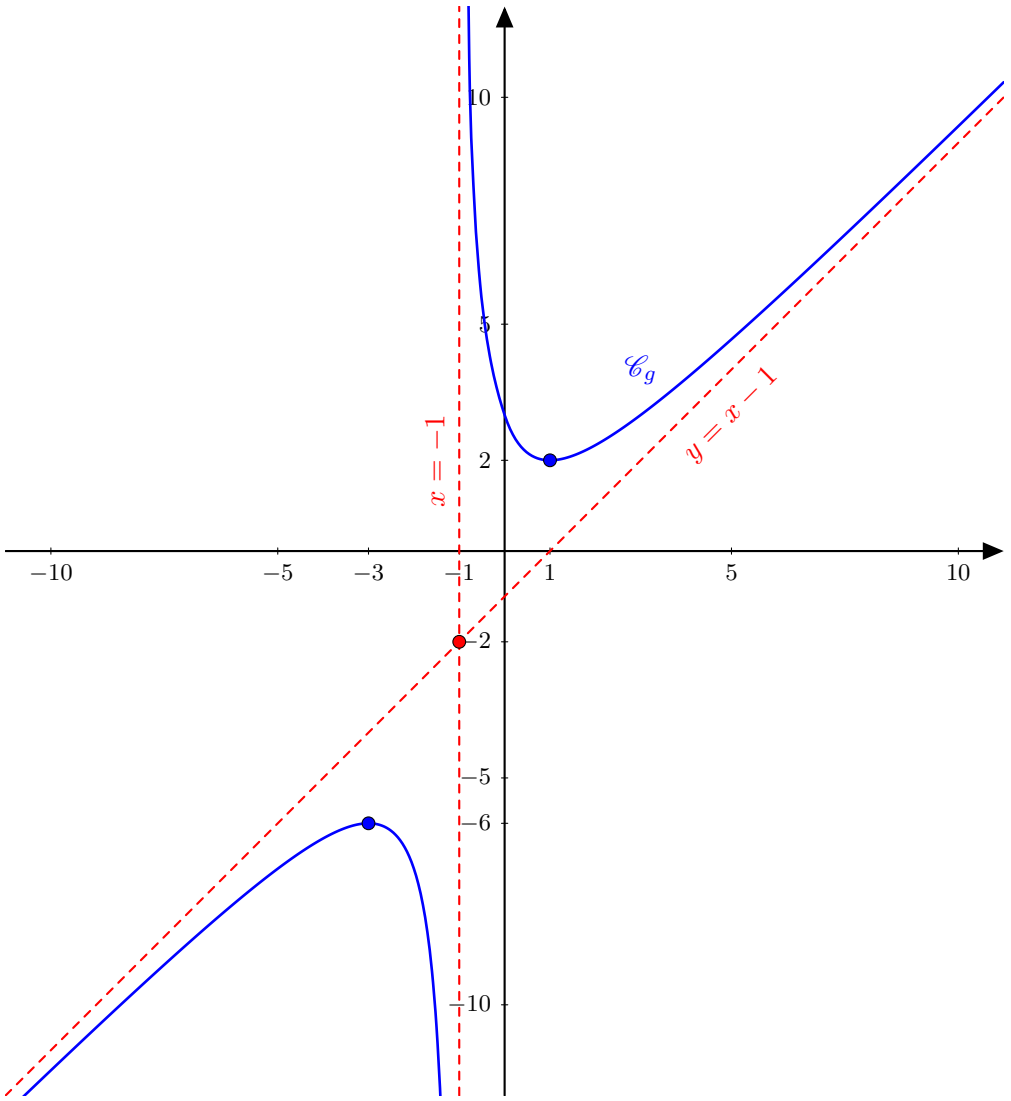
Conclusion,

$$\boxed{\forall h\in\mathbb{R}^*, \qquad \frac{g(-1+h)+g(-1-h)}{2} = -2.}$$

16. Par la question précédente, on en déduit que

$$\boxed{\text{le graphe de } g \text{ admet pour centre de symétrie le point } (-1;-2).}$$

17. Par les questions précédentes, on obtient le graphe suivant :



Partie 2 : Etude de f

18. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$x \in U \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad x+1>0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1.$$

Conclusion, la fonction f est définie sur

$$\boxed{U =]-1;+\infty[\,.}$$

19. On observe que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2}\left(1-\dfrac{2}{x}\right) = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} 4\ln(1+x) = +\infty$. Par somme,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} 4\ln(1+x) = \lim\limits_{\substack{t\to0\\t>0}} 4\ln(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \dfrac{x^2}{2} - x = \dfrac{3}{2}$. Par somme,

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

20. La fonction f est dérivable sur $U =]-1;+\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont et

$$\forall x \in]-1;+\infty[\,, \qquad f'(x) = x - 1 + 4\frac{1}{x+1} = \frac{x^2+x-x-1+4}{x+1} = \frac{x^2+3}{x+1} = g(x).$$

Or par la partie précédente, on a $\forall x > -1$, $g(x) \geqslant 2 > 0$. Donc pour tout $x > -1$, $f'(x) > 0$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$. Conclusion, à l'aide de la question précédente, on obtient,

x	-1	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

21. Par ce qui précède,

- la fonction f est continue sur U,
- la fonction f est strictement croissante sur U.

Donc par le théorème de la bijection, la fonction f définit une bijection de U dans

$$f(U) = f(]-1;+\infty[) = \left]\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ définit une bijection de } U =]-1;+\infty[\text{ dans } V = \mathbb{R}.}$$

22. Soit $x \in]0;1[$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) > \frac{x(2-x)}{8} \quad &\Leftrightarrow \quad 8\ln(1+x) > 2x - x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 4\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{2} - x + 4\ln(1+x) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad f(x) > 0.
\end{aligned}$$

Or par la question 20. la fonction f est strictement croissante sur $U =]-1;+\infty[$ et donc sur $[0;1[$. Donc pour tout $x \in]0;1[$,

$$f(x) > f(0) = 0 - 0 + 4\ln(1) = 0.$$

Donc pour tout $x \in]0;1[$, $f(x) > 0$. Donc par les équivalences précédentes, on conclut que

$$\boxed{\forall x \in]0;1[\,, \qquad \ln(1+x) > \frac{x(2-x)}{8}.}$$

23. Soit $x \in]1;+\infty[$. Posons $y = \frac{1}{x}$. Alors, $y \in]0;1[$. Donc par la question précédente,

$$\ln(1+y) > \frac{y(2-y)}{8}.$$

Autrement dit,

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{\frac{1}{x}\left(2-\frac{1}{x}\right)}{8} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) > \frac{2x-1}{8x^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x > 1, \qquad \ln(x+1) - \ln(x) > \frac{2x-1}{8x^2}.}$$

Problème II - Trigonométrie

Partie 1 : Une équation

On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E) \qquad \cos(x) + \cos(3x) = \frac{1}{2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. On observe les points suivants :
   - la fonction cosinus est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,
   - la fonction cosinus est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
   - $\frac{1+\sqrt{5}}{4} > 0$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{4} < \frac{1+\sqrt{9}}{4} = \frac{1+3}{4} = 1$. Donc $\frac{1+\sqrt{5}}{4} \in]0;1[= \left]\cos\left(\frac{\pi}{2}\right); \cos(0)\right[$.

   Donc par le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires),

   $$\boxed{\exists! \alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \cos(\alpha) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

   De même,
   - la fonction cosinus est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,
   - la fonction cosinus est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
   - $\frac{\sqrt{5}-1}{4} > 0$ et $\frac{\sqrt{5}-1}{4} < \frac{\sqrt{5}}{4} < \frac{3}{4} < 1$. Donc $\frac{\sqrt{5}-1}{4} \in]0;1[= \left]\cos\left(\frac{\pi}{2}\right); \cos(0)\right[$.

   Conclusion, par le théorème de la bijection,

   $$\boxed{\exists! \beta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \cos(\beta) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.}$$

2. (a) On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x + x) \\
&= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \\
&= \left(2\cos^2(x) - 1\right)\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\sin(x) \\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) \\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\left(1 - \cos^2(x)\right)\cos(x) \\
&= 4\cos^3(x) - 3\cos(x).
\end{aligned}$$

   Vérification, si $x = \frac{\pi}{4}$ par exemple, $\cos(3x) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $4\cos^3(x) - 3\cos(x) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\frac{2\sqrt{2}}{8} - 3\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 3\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *OK !*
   Conclusion,

   $$\boxed{\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x).}$$

   (b) Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
(E) \qquad \cos(x) + \cos(3x) = \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(x) + 4\cos^3(x) - 3\cos(x) = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad 4\cos^3(x) - 2\cos(x) - \frac{1}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos^3(x) - \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{8} = 0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{(E) \quad \Leftrightarrow \quad \cos^3(x) - \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{8} = 0.}$$

3. (a) Par la formule $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, on a

$$\begin{aligned}\cos(x) + \cos(3x) &= 2\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)\\ &= 2\cos(2x)\cos(-x)\\ &= 2\cos(2x)\cos(x) \qquad \text{par parité du cosinus.}\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos(x) + \cos(3x) = 2\cos(2x)\cos(x).}$$

Vérification, si $x = \frac{\pi}{3}$, *on a* $\cos(x)+\cos(3x) = \frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2}$ *et* $2\cos(2x)\cos(x) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ *OK !*

(b) Par la question précédente,

$$(E) \qquad \cos(x) + \cos(3x) = \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\cos(2x)\cos(x) = \frac{1}{2}.$$

Or $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. Donc

$$\begin{aligned}(E) \quad &\Leftrightarrow \quad 2\left(2\cos^2(x) - 1\right)\cos(x) = \frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \quad 4\cos^3(x) - 2\cos(x) = \frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \quad 4\cos^3(x) - 2\cos(x) - \frac{1}{2} = 0\\ &\Leftrightarrow \quad \cos^3(x) - \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{8} = 0.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{(E) \quad \Leftrightarrow \quad \cos^3(x) - \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{8} = 0.}$$

4. *Méthode 1.* On note que si $X = -\frac{1}{2}$, on a

$$X^3 - \frac{X}{2} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = 0.$$

Donc $-\frac{1}{2}$ est une racine de $X^3 - \frac{X}{2} - \frac{1}{8}$. Donc $X + \frac{1}{2}$ divise $X^3 - \frac{X}{2} - \frac{1}{8}$:

$$\begin{array}{rrr|l}
X^3 & -\frac{X}{2} & -\frac{1}{8} & X + \frac{1}{2} \\
\cline{4-4}
-(X^3 + \frac{X^2}{2}) & & & X^2 - \frac{X}{2} - \frac{1}{4} \\
\cline{1-1}
-\frac{X^2}{2} & -\frac{X}{2} & -\frac{1}{8} & \\
-(-\frac{X^2}{2} & -\frac{X}{4}) & & \\
\cline{1-2}
 & -\frac{X}{4} & -\frac{1}{8} & \\
 & -(-\frac{X}{4} & -\frac{1}{8}) & \\
\cline{2-3}
 & 0 & &
\end{array}$$

Conclusion, on a $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = -\frac{1}{4}$,

$$\boxed{X^3 - \frac{X}{2} - \frac{1}{8} = \left(X + \frac{1}{2}\right)\left(X^2 - \frac{X}{2} - \frac{1}{4}\right).}$$

Méthode 2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\left(X+\frac{1}{2}\right)\left(aX^2+bX+c\right) = aX^3+bX^2+cX+\frac{a}{2}X^2+\frac{b}{2}X+\frac{c}{2} = aX^3+\left(b+\frac{a}{2}\right)X^2+\left(c+\frac{b}{2}\right)X+\frac{c}{2}.$$

Donc pour que $X^3-\frac{X}{2}-\frac{1}{8} = \left(X+\frac{1}{2}\right)\left(aX^2+bX+c\right)$, on note qu'il suffit de prendre

$$\begin{cases} a=1 \\ b+\frac{a}{2}=0 \\ c+\frac{b}{2}=-\frac{1}{2} \\ \frac{c}{2}=-\frac{1}{8} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a=1 \\ b=-\frac{a}{2}=-\frac{1}{2} \\ c=-\frac{b}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4} \\ c=-\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Conclusion, en prenant $a=1$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=-\frac{1}{4}$, on a

$$\boxed{X^3-\frac{X}{2}-\frac{1}{8}=\left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X^2-\frac{X}{2}-\frac{1}{4}\right).}$$

5. Soient $\mathscr{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E) et $x \in \mathscr{S}_E$. Par la question 2.b ou 3.b on a

$$x \in \mathscr{S}_E \quad\Leftrightarrow\quad \cos^3(x)-\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{1}{8}=0.$$

Posons $X=\cos(x)$. Dès lors,

$$x \in \mathscr{S}_E \quad\Leftrightarrow\quad X^3-\frac{X}{2}-\frac{1}{8}=0.$$

Donc par la question précédente,

$$x \in \mathscr{S}_E \quad\Leftrightarrow\quad \left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X^2-\frac{X}{2}-\frac{1}{4}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad X=-\frac{1}{2} \text{ OU } X^2-\frac{X}{2}-\frac{1}{4}=0.$$

Soit Δ le discriminant de $X^2-\frac{X}{2}-\frac{1}{4}$. On a $\Delta=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$. Donc les racines associées sont $\frac{1/2+\sqrt{5}/2}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$. Ainsi,

$$x \in \mathscr{S}_E \quad\Leftrightarrow\quad X=-\frac{1}{2} \text{ OU } X=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ OU } X=\frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Conclusion, pour $x \in \mathscr{S}_E$,

$$\boxed{\cos(x)=-\frac{1}{2} \text{ OU } \cos(x)=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ OU } \cos(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{4}.}$$

6. Par la question précédente, on a même

$$x \in \mathscr{S}_E \quad\Leftrightarrow\quad \cos(x)=-\frac{1}{2} \text{ OU } \cos(x)=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ OU } \cos(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Par la question 1.

$$\begin{aligned} x \in \mathscr{S}_E \quad &\Leftrightarrow\quad \cos(x)=-\frac{1}{2} \text{ OU } \cos(x)=\cos(\alpha) \text{ OU } \cos(x)=-\cos(\beta)=\cos(\pi-\beta) \\ &\Leftrightarrow\quad \cos(x)=-\frac{1}{2} \text{ OU } \cos(x)=\cos(\alpha) \text{ OU } \cos(x)=-\cos(\beta)=\cos(\pi-\beta) \\ &\Leftrightarrow\quad \exists k \in \mathbb{Z},\quad x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ OU } x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ OU } x=\alpha+2k\pi \\ &\qquad\qquad \text{OU } x=-\alpha+2k\pi \text{ OU } x=\pi-\beta+2k\pi \text{ OU } x=-\pi+\beta+2k\pi. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_E=\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi,-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\alpha+2k\pi,-\alpha+2k\pi,\pi-\beta+2k\pi,-\pi+\beta+2k\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}.}$$

Partie 2 : Calcul de S.

Posons

$$\theta = \frac{\pi}{5} \qquad \text{et} \qquad S = \cos(\theta) + \cos(3\theta).$$

7. On observe que $3\theta = \frac{3\pi}{5}$ et $2\theta = \frac{2\pi}{5}$. Donc $3\theta + 2\theta = \pi$ i.e. $3\theta = \pi - 2\theta$. Dès lors,

$$\cos(3\theta) = \cos(\pi - 2\theta) = -\cos(2\theta).$$

De même $4\theta = \pi - \theta$ et donc $\cos(4\theta) = -\cos(\theta)$. Conclusion,

$$\boxed{\cos(3\theta) = -\cos(2\theta) \qquad \text{et} \qquad \cos(4\theta) = -\cos(\theta).}$$

8. Par la question précédente,

$$S = \cos(\theta) + \cos(3\theta) = \cos(\theta) - \cos(2\theta).$$

Or $0 < \theta < 2\theta < \frac{\pi}{2}$. Donc par la stricte décroissance de la fonction cosinus sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\cos(\theta) > \cos(2\theta) \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos(\theta) - \cos(2\theta) > 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{S > 0.}$$

9. On a

$$2023 = 10 \times 202 + 3 = 5 \times 202 \times 2 + 3.$$

Donc

$$2023\,\theta = 2023\frac{\pi}{5} = 202 \times 2\pi + \frac{3\pi}{5}.$$

Donc par la 2π-périodicité de la fonction cosinus,

$$\cos(2023\,\theta) = \cos\left(202 \times 2\pi + \frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \cos(3\theta).$$

Puis par la question 7.

$$\cos(2023\,\theta) = -\cos(2\theta).$$

D'autre part, $6\theta = \frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$. Donc

$$\cos(6\theta) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\cos(\theta).$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos(2023\,\theta) = -\cos(2\theta) \qquad \text{et} \qquad \cos(6\theta) = -\cos(\theta).}$$

10. *Méthode 1.* On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
S^2 &= (\cos(\theta) + \cos(3\theta))^2 \\
&= \cos^2(\theta) + 2\cos(\theta)\cos(3\theta) + \cos^2(3\theta) \\
&= \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} + \cos(\theta + 3\theta) + \cos(\theta - 3\theta) + \frac{1 + \cos(6\theta)}{2} \\
&= 1 + \frac{\cos(2\theta) + \cos(4\theta)}{2} + \cos(4\theta) + \cos(2\theta) \\
&= 1 + \frac{3}{2}(\cos(2\theta) + \cos(4\theta)).
\end{aligned}$$

Par la question 7. $\cos(4\theta) = -\cos(\theta)$. Conclusion,

$$\boxed{S^2 = 1 + \frac{3}{2}(\cos(2\theta) - \cos(\theta)).}$$

Méthode 2. On a vu que $S = \cos(\theta) - \cos(2\theta)$. Par suite, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} S^2 &= (\cos(\theta) - \cos(2\theta))^2 \\ &= \cos^2(\theta) - 2\cos(\theta)\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta) \\ &= \frac{1+\cos(2\theta)}{2} - \cos(\theta+2\theta) - \cos(\theta-2\theta) + \frac{1+\cos(4\theta)}{2} \\ &= 1 + \frac{\cos(2\theta)+\cos(4\theta)}{2} - \cos(3\theta) - \cos(\theta). \end{aligned}$$

Par la question 7.

$$\begin{aligned} S^2 &= 1 + \frac{\cos(2\theta)-\cos(\theta)}{2} + \cos(2\theta) - \cos(\theta) \\ &= 1 + \frac{3}{2}(\cos(2\theta) - \cos(\theta)). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S^2 = 1 + \frac{3}{2}(\cos(2\theta) - \cos(\theta)).}$$

11. On a vu que $S = \cos(\theta) - \cos(2\theta)$. Donc par la question précédente,

$$S^2 = 1 - \frac{3}{2}S \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{S^2 + \frac{3}{2}S - 1 = 0.}$$

12. Soit Δ le discriminant associé à $S^2 + \frac{3}{2}S - 1$. On a

$$\Delta = \frac{9}{4} + 4 = \frac{9+16}{4} = \frac{25}{4}.$$

Les racines associées sont $\frac{-3/2-5/2}{2} = \frac{-8}{4} = -2$ et $\frac{-3/2+5/2}{2} = \frac{1}{2}$. Ainsi par la question précédente, on a

$$S = -2 \quad \text{OU} \quad S = \frac{1}{2}.$$

Or par la question 8. $S > 0$. Conclusion,

$$\boxed{S = \frac{1}{2}.}$$

Partie 3 : Valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et applications

13. Par la partie précédente, on a

$$S = \cos(\theta) + \cos(3\theta) = \frac{1}{2}.$$

Donc θ est solution de l'équation (E). Donc par la question 5.

$$\cos(\theta) = -\frac{1}{2} \quad \text{OU} \quad \cos(\theta) = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{OU} \quad \cos(\theta) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Or $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$. Donc par la stricte décroissance de la fonction cosinus sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(\theta) > 0$. Or $-\frac{1}{2} < 0$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$. Nécessairement,

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

14. Par la formule fondamentale,

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

Par la question précédente,

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2=1-\frac{1+2\sqrt{5}+5}{16}=\frac{16-6-2\sqrt{5}}{16}=\frac{10-2\sqrt{5}}{16}.$$

Donc

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\pm\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}=\pm\frac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$$

Or $\frac{\pi}{5}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)>0$. Conclusion,

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}.}$$

15. Soit $x\in\mathbb{R}$ et

$$(I) \qquad 2\cos(2x)+4\sqrt{3}\sin(x)\cos(x)\leqslant 1+\sqrt{5}.$$

On sait que $2\sin(x)\cos(x)=\sin(2x)$. Donc

$$(I) \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\cos(2x)+2\sqrt{3}\sin(2x)\leqslant 1+\sqrt{5}.$$

Faisons apparaître la forme polaire :

$$\begin{aligned}
(I) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x)\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{4}\\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(2x)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(2x)\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{4}\\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{4}\\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \qquad \text{par la question 13.}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{5}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{9\pi}{5}+2k\pi\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\frac{9\pi}{5}+\frac{\pi}{3}+2k\pi\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z}, \quad \frac{8\pi}{15}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\frac{32\pi}{15}+2k\pi\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z}, \quad \frac{4\pi}{15}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{16\pi}{15}+k\pi.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_I=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{4\pi}{15}+k\pi;\frac{16\pi}{15}+k\pi\right].}$$

Problème III - Bijection

On définit

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\frac{2\mathrm{e}^x+3}{\mathrm{e}^x+1}.\end{array}$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^x + 1 > 0$. Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^x\,(\mathrm{e}^x+1) - (2\,\mathrm{e}^x+3)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x\,(2\,\mathrm{e}^x+2-2\,\mathrm{e}^x-3)}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = -\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}.$$

Conclusion, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}.}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ et $(\mathrm{e}^x+1)^2 > 0$. Donc par la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) < 0.$$

La fonction f est alors strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\,\mathrm{e}^x+3}{\mathrm{e}^x+1} = 3.$$

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^x+3}{\mathrm{e}^x+1} = \frac{2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\frac{1+\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 2\frac{1+\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 2.$$

Conclusion,

x	$-\infty$	$+\infty$
f	3 ↘	2

3. On a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$. Directement, on conclut que

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ présente une asymptote horizontale d'équation } y = 2 \text{ en } +\infty.}$$

4. Puisque f est dérivable en 0, son graphe admet une tangente en 0 d'équation

$$y = f'(0)\,(x-0) + f(0) = -\frac{1}{(1+1)^2}x + \frac{2+3}{1+1} = -\frac{x}{4} + \frac{5}{2} = \frac{10-x}{4}.$$

Conclusion, le graphe de f admet une tangente en 0 d'équation

$$\boxed{y = \frac{10-x}{4}.}$$

5. Par ce qui précède, on a

- f est continue sur $\mathbb{R}$,

- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc par le théorème de la bijection, f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans

$$J = f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x); \lim_{x\to-\infty} f(x)\right[=]2;3[.$$

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ définit une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } J =]2;3[.}$$

6. Par la question précédente et le théorème de la bijection, on sait de plus que f^{-1} est de même stricte monotonie que f donc f^{-1} est strictement décroissante sur J. De plus, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f^{-1}(x) = +\infty$. De même $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f^{-1}(x) = -\infty$. Conclusion,

x	2	3
f^{-1}	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$

Enfin, par le cours, on sait que le graphe de f^{-1} s'obtient à partir de celui de f

$$\boxed{\text{par la symétrie axiale d'axe la droite d'équation } y = x.}$$

7. On a les points suivantes :

- la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$,
- la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$,
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \neq 0$.

Donc par le théorème de la dérivée de la fonction réciproque,

$$\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur } J = f(\mathbb{R}) =]2;3[.}$$

De plus,

$$\forall x \in]2;3[, \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Or pour tout $u \in \mathbb{R}$, $f'(u) = -\frac{\mathrm{e}^u}{(1+\mathrm{e}^u)^2}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]2;3[, \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = -\left(1+\mathrm{e}^{f^{-1}(x)}\right)\mathrm{e}^{-f^{-1}(x)}.}$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
f^2(x) - 5f(x) + 6 &= \left(\frac{2\,\mathrm{e}^x+3}{\mathrm{e}^x+1}\right)^2 - 5\frac{2\,\mathrm{e}^x+3}{\mathrm{e}^x+1} + 6 \\
&= \frac{4\,\mathrm{e}^{2x}+12\,\mathrm{e}^x+9}{(\mathrm{e}^x+1)^2} - \frac{(10\,\mathrm{e}^x+15)(\mathrm{e}^x+1)}{(\mathrm{e}^x+1)^2} + \frac{6(\mathrm{e}^x+1)^2}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \\
&= \frac{4\,\mathrm{e}^{2x}+12\,\mathrm{e}^x+9-10\,\mathrm{e}^{2x}-10\,\mathrm{e}^x-15\,\mathrm{e}^x-15+6\,\mathrm{e}^{2x}+12\,\mathrm{e}^x+6}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \\
&= \frac{-\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \\
&= f'(x).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^2(x) - 5f(x) + 6 = f'(x).}$$

9. On a vu que

$$\forall x \in J, \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Donc par la question précédente,

$$\forall x \in J, \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)^2 - 5f\left(f^{-1}(x)\right) + 6} = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in J, \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}.}$$

10. On observe que 2 et 3 sont racines de $x^2 - 5x + 6$ (car le produit fait 6 et la somme 5, sinon faire un discriminant) donc par la question précédente,

$$\forall x \in]2;3[, \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)}.$$

Méthode 1. Par le théorème de la décomposition en éléments simples (à venir !), il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in]2;3[, \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2}.$$

Dès lors,

$$a = \lim_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} (x-3)\left(f^{-1}\right)'(x) = \lim_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3-2} = 1.$$

De même,

$$b = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} (x-2)\left(f^{-1}\right)'(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{2-3} = -1.$$

Conclusion, pour $a = 1$ et $b = -1$,

$$\boxed{\forall x \in]2;3[, \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}.}$$

Méthode 2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in]2;3[$, on a

$$\frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2} = \frac{ax - 2a + bx - 3b}{(x-3)(x-2)} = \frac{(a+b)x - 2 - 3b}{(x-3)(x-2)}.$$

On note alors que pour avoir $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2}$, il SUFFIT de prendre

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -2a-3b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ -2a+3a=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1. \end{cases}$$

Conclusion, pour $a = 1$ et $b = -1$,

$$\boxed{\forall x \in]2;3[, \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}.}$$

11. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$ est continue sur l'intervalle $]2;3[$. Donc en primitivant la relation précédente, on a

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in]2;3[\,, \qquad f^{-1}(x) = \ln(|x-3|) - \ln(|x-2|) + C.$$

Or pour tout $x \in]2;3[$, $x-3<0$ et $x-2>0$. Ainsi,

$$\forall x \in]2;3[\,, \qquad f^{-1}(x) = \ln(3-x) - \ln(x-2) + C.$$

Or, on a $f(0) = \frac{2+3}{1+1} = \frac{5}{2}$. Donc $f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = 0$. Ainsi,

$$\ln\left(3-\frac{5}{2}\right) - \ln\left(\frac{5}{2}-2\right) + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]2;3[\,, \qquad f^{-1}(x) = \ln(3-x) - \ln(x-2)\,.}$$

12. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]2;3[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{2\,\mathrm{e}^x + 3}{\mathrm{e}^x + 1} \\
&\Leftrightarrow \quad y(\mathrm{e}^x + 1) = 2\,\mathrm{e}^x + 3 && \text{car } \mathrm{e}^x + 1 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x (y-2) = 3 - y \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x = \frac{3-y}{y-2} && \text{car } y > 2 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \ln\left(\frac{3-y}{y-2}\right) && \text{car } \frac{3-y}{y-2} > 0 \text{ car } 3-y>0 \text{ et } y-2>0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \ln(3-y) - \ln(y-2) && \text{car } 3-y>0 \text{ et } y-2>0.
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question précédente,

$$\boxed{\forall x \in]2;3[\,, \qquad f^{-1}(x) = \ln(3-x) - \ln(x-2)\,.}$$