Epreuve de mathématiques 2
2023-2024

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

lycée Raoul Follereau

Problème 1 - Calcul algébrique

Pour toute suite de réels $(a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}$.

Partie 1 : Quelques sommes classiques

1. On suppose dans cette question que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 3k+3$.
   Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de S_n en fonction de n.
2. On suppose dans cette question que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = (k+1)\,\mathrm{e}^k$.
   Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de S_n en fonction de n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On suppose dans cette question que $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $a_k = (k+1)(k+n)^3$.
   (a) Montrer que $S_n = \sum_{k=n}^{2n} k^3$.
   (b) En déduire S_n en fonction de n. *On donnera le résultat sous forme factorisée.*

Partie 2 : Une somme binomiale

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^{k+1}}{k+1}$.

4. Préciser T_0, T_1, T_2.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0;n]\!]$, on a $\binom{n}{k}\frac{2^{k+1}}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}\frac{2^{k+1}}{n+1}$.
6. En déduire l'expression de T_n en fonction de n.
7. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, le calcul de $U_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^k\,(n-k+1)}$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$. En admettant que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$, calculer $V_n = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{n}{j} \frac{2^i}{j+1}$.

Partie 3 : Une intégration par partie sur les sommes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad G_n = \sum_{k=1}^{n} kH_k.$$

On souhaite exprimer G_n en fonction de H_{n+1} par deux méthodes.

9. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, simplifier $u_k\,(v_{k+1}-v_k) + (u_{k+1}-u_k)\,v_{k+1}$.
10. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k\,(v_{k+1}-v_k) = u_{n+1}v_{n+1} - u_1v_1 - \sum_{k=1}^{n} (u_{k+1}-u_k)\,v_{k+1} \qquad (\bigstar).$$

11. En posant $u_k = k^2$ et $v_k = k-1$, retrouver pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.
12. *Méthode 1.*
    (a) On définit la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant $v_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_{k+1} - v_k = k$. En sommant, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_{n+1} en fonction de n.
    (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une expression de G_n en fonction de n et de H_{n+1}.
13. *Méthode 2.*
    (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{j}{i}$.
    (b) En déduire à nouveau une expression de G_n en fonction de n et de H_{n+1}.

Problème 2 - Complexes

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on définit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z^2+\alpha}{2z} \end{array}$$

Partie 1 : Quelques calculs

1. Calculer la forme polaire de $2i$ et de $\sqrt{3} - i$.
2. On suppose que $\alpha = 4i$.
   (a) Calculer $f(2i)$ et préciser sa forme polaire.
   (b) Calculer $f\left(\sqrt{3} - i\right)$ et préciser sa forme polaire.
3. On suppose que $\alpha = 1$.
   (a) Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrer que $f(z) \in \mathbb{R}$.
   (b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $f\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)$.
   (c) En déduire que $f(\mathbb{U}) = [-1; 1]$. *On procédera pour double inclusion.*
4. On suppose que $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer $f^{\leftarrow}(i\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C}^* \mid f(z) \in i\mathbb{R}\}$.

Partie 2 : Etude d'une suite complexe

Soit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\beta) > 0$. On pose alors $\alpha = \beta^2$ et on note

$$\mathcal{P}_+ = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}\left(\frac{z}{\beta}\right) > 0 \right\}.$$

5. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$.
   (a) Justifier que $z \neq 0$ et calculer la forme algébrique de $\frac{1}{z}$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 0$.
6. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{z}{\beta} \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\beta}\right)\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{\beta z}\right) > 0$.
7. Démontrer $f(\mathcal{P}_+) \subseteq \mathcal{P}_+$.

On fixe $z_0 = \alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$z_{n+1} = f(z_n) \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{z_n - \beta}{z_n + \beta}.$$

8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n existe et $z_n \in \mathcal{P}_+$.
9. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n existe.
10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = (w_n)^2$.
11. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de w_n en fonction de w_0 et de n.
12. (a) Démontrer que $|\beta - 1|^2 < |\beta + 1|^2$.
    (b) En déduire que $|w_0| < 1$.
    (c) En déduire également que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|w_n| < 1$.
13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \beta\frac{1+w_n}{1-w_n}$.
14. On rappelle que pour $q \in \mathbb{C}$, si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. Conclure en donnant la limite de z_n.

Problème 3 - Fonctions usuelles

On considère les fonctions définies lorsque c'est possible par

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right) \qquad \text{et} \qquad g(x) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right).$$

On souhaite montrer l'égalité suivante :

$$\forall x \in [0;4[\,, \qquad g(x) = f(x) + \frac{\pi}{2}. \qquad (\bigstar)$$

Partie 1 : Méthode 1, par la dérivation

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f.
2. Préciser $f(0)$, $f(2)$ et $f\left(\sqrt{3}+2\right)$.
3. Déterminer $\mathcal{D}_{f'}$ le domaine de dérivabilité de f.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$,
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}.$$
5. Déterminer I le domaine de définition de g.
6. Préciser $g(0)$ et $g(2)$.
7. Résoudre l'équation $g(x) = \frac{\pi}{3}$.
8. Déterminer I' le domaine de dérivabilité de g.
9. Montrer que pour tout $x \in I'$,
$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}.$$
10. Etablir $(\bigstar)$.

Partie 2 : Par de la trigonométrie

On fixe $x \in [0;4[$.

11. Soit $u \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
    (a) Exprimer $\tan'(u)$ en fonction de $\tan(u)$.
    (b) Exprimer $\tan'(u)$ en fonction de $\cos(u)$.
    (c) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos^2(\arctan(t)) = \frac{1}{1+t^2}$.
12. En déduire $\cos(g(x))$.
13. Calculer $\cos\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)$.
14. En déduire $(\bigstar)$.

Partie 3 : Un peu d'hyperbolique

15. Résoudre l'équation $\operatorname{ch}(y) = \sqrt{2}$, d'inconnue $y \in \mathbb{R}$.
16. En déduire $A = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid 2\operatorname{ch}^2(y) \in [0;4[\right\}$.
17. A l'aide de $(\bigstar)$, montrer que
$$\forall y \in A, \qquad 2\arctan\left(\frac{\operatorname{ch}(y)}{\sqrt{2-\operatorname{ch}^2(y)}}\right) = \arcsin\left(\operatorname{sh}^2(y)\right) + \frac{\pi}{2}.$$