Commentaires du DS2
Calcul algébrique, complexes, fonctions usuelles

De grandes lacunes pour certains en calcul algébrique y compris sur les définitions de base. La partie sur les fonctions usuelles vous a rapporté plus de points. Les réponses sur les complexes sont d'un niveau très variés. Certains sont à l'aise alors que d'autres n'arrivent pas à obtenir la forme polaire d'un complexe simple. De façon plus générale, les écarts se creusent entre ceux qui ont compris comment travailler et assimiler les méthodes et ceux dont les lacunes s'accumulent, probablement à cause d'un apprentissage trop superficiel. La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{70}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1.1	P1.2	P1.3	P1	P2.1	P2.2	P2	P3.1	P3.2	P3.3	P3	Total	Note finale
Moyenne	-0.9	3,4	2,1	1,4	6,8	5,9	1,7	7,6	10,2	1,9	0,8	13	26,5	9,06
Sur		8	13	16	37	15	27	42	20	11	7	38	117	20

TOTAL : 95 pt

Problème I - Calcul algébrique 37 pt

Pour toute suite de réels $(a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}$.

Partie 1 : Quelques sommes classiques 8 pt

1. **2 pt** On suppose dans cette question que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 3k + 3$.
   Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de S_n en fonction de n.

   Bien (et facile). Étonnamment quelques erreurs ou blocages quand même. Attention la somme de 0 à n contient $n + 1$ termes et non n.

2. **2 pt** On suppose dans cette question que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = (k + 1)\,\mathrm{e}^k$.
   Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de S_n en fonction de n.

   Trop peu de bonnes réponses, on ne peut pas ne pas reconnaitre une somme géométrique. Certains pensent même à préciser $\mathrm{e} \neq 1$, c'est bien.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On suppose dans cette question que $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $a_k = (k + 1)(k + n)^3$.

   (a) **2 pt** Montrer que $S_n = \sum_{k=n}^{2n} k^3$.

   Lisez bien la question ! ! ! On ne demande pas directement de calculer S_n, certains sont partis sur un lourd et fastidieux développement, alors qu'un simple glissement d'indice suffisait. Plusieurs bonnes réponses.

   (b) **2 pt** En déduire S_n en fonction de n. *On donnera le résultat sous forme factorisée.*

   Attention dans la relation Chasles à ne pas écrire $\sum_{k=n}^{2n} k^3 = \sum_{k=0}^{2n} k^3 - \sum_{k=0}^{n} k^3$ ce qui est FAUX ! Car vous y avez soustrait n^3 en trop. Des difficultés encore dans la factorisation du résultat.

Partie 2 : Une somme binomiale $\boxed{13 \text{ pt}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^{k+1}}{k+1}$.

4. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Préciser T_0, T_1, T_2.
Facile et... très mal réussie !! Inquiétant, ces questions faciles doivent absolument être rentabilisées. A reprendre calmement pour comprendre ce qui s'est passé.

5. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0; n]\!]$, on a $\displaystyle\binom{n}{k} \frac{2^{k+1}}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \frac{2^{k+1}}{n+1}$.
Quelques bonnes réponses mais déjà moins traitée.

6. $\boxed{3 \text{ pt}}$ En déduire l'expression de T_n en fonction de n.
Un petit glissement d'indice était nécessaire pour faire apparaître proprement un binôme de Newton (il faut le dire !).

7. $\boxed{3 \text{ pt}}$ En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, le calcul de $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^k (n-k+1)}$.
Une inversion d'indice ici. Quelques-uns l'ont bien vu.

8. $\boxed{3 \text{ pt}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. En admettant que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$, calculer $V_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{n}{j} \frac{2^i}{j+1}$.
Aïe, beaucoup d'impasse ou de lacunes sur les sommes doubles. Aucune raison de laisser cette notion de côté.

Partie 3 : Une intégration par partie sur les sommes $\boxed{16 \text{ pt}}$

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad G_n = \sum_{k=1}^{n} k H_k.$$

On souhaite exprimer G_n en fonction de H_{n+1} par deux méthodes.

9. $\boxed{1 \text{ pt}}$ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, simplifier $u_k (v_{k+1} - v_k) + (u_{k+1} - u_k) v_{k+1}$.

10. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} u_k (v_{k+1} - v_k) = u_{n+1} v_{n+1} - u_1 v_1 - \sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k) v_{k+1} \qquad (\bigstar).$$
Bien.

11. $\boxed{3 \text{ pt}}$ En posant $u_k = k^2$ et $v_k = k - 1$, retrouver pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.
Plusieurs bonnes réponses.

12. *Méthode 1.*
   (a) $\boxed{2 \text{ pt}}$ On définit la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par récurrence en posant $v_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_{k+1} - v_k = k$. En sommant, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_{n+1} en fonction de n.
   Peu traitée mais quelques réussites.

(b) $\boxed{3 \text{ pt}}$ En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une expression de G_n en fonction de n et de H_{n+1}.
Non réussie.

13. *Méthode 2.*

(a) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{j}{i}$.

Non traitée.

(b) $\boxed{3 \text{ pt}}$ En déduire à nouveau une expression de G_n en fonction de n et de H_{n+1}.
Non traitée.

Problème II - Complexes $\boxed{42 \text{ pt}}$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on définit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z^2+\alpha}{2z} \end{array}$$

Partie 1 : Quelques calculs $\boxed{15 \text{ pt}}$

1. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Calculer la forme polaire de $2i$ et de $\sqrt{3} - i$.
Du basique de chez basique mais pas toujours réussie. Il manque parfois un moins dans l'argument de $\sqrt{3} - i$. Ne parachutez pas votre résultat une petite ligne de calcul est attendue.

2. On suppose que $\alpha = 4i$.

(a) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Calculer $f(2i)$ et préciser sa forme polaire.
Que du calcul. Une moitié de la classe s'en sort et l'autre non. Il faut persévérer.

(b) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Calculer $f\left(\sqrt{3} - i\right)$ et préciser sa forme polaire.
Pareil en pire.

3. On suppose que $\alpha = 1$.

(a) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrer que $f(z) \in \mathbb{R}$.
Quelques malins font comme pour la question d'après. Cela marche je n'ai rien à redire (et cela montre qu'il est utile de lire la suite d'un sujet). Un classique traité de nombreuses fois en TD.

(b) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $f\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)$.
Un lot très correct de bonnes réponses.

(c) $\boxed{3 \text{ pt}}$ En déduire que $f(\mathbb{U}) = [-1; 1]$. *On procédera pour double inclusion.*
Quelques éléments mais non réussie. C'est normal quelque part, nous n'avons encore jamais vraiment abordé ce type de question auparavant.

4. $\boxed{2 \text{ pt}}$ On suppose que $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer $f^{\leftarrow}(i\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C}^* \mid f(z) \in i\mathbb{R}\}$.
Très peu traitée mais la question est classique.

Partie 2 : Etude d'une suite complexe $\boxed{27 \text{ pt}}$

Soit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\beta) > 0$. On pose alors $\alpha = \beta^2$ et on note

$$\mathcal{P}_+ = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}\left(\frac{z}{\beta}\right) > 0 \right\}.$$

5. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$.

(a) $\boxed{2\text{ pt}}$ Justifier que $z \neq 0$ et calculer la forme algébrique de $\frac{1}{z}$.
Beaucoup ont cru que $z \in \mathcal{P}_+$. Lisez correctement l'énoncé ! La justification de $z \neq 0$ a causé étonnamment beaucoup d'erreurs, alors que la question n'est pas piègeuse. Mieux pour la forme algébrique.

(b) $\boxed{2\text{ pt}}$ Montrer que $\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 0$.
Trop d'horreurs du genre $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\beta}\right) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Re}(\beta)}$. A revoir souvent pour la justification et la rédaction.

6. $\boxed{2\text{ pt}}$ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{z}{\beta} \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$. Montrer que $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\beta}\right)\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha}{\beta z}\right) > 0$.
Peu réussie.

7. $\boxed{3\text{ pt}}$ Démontrer $f(\mathcal{P}_+) \subseteq \mathcal{P}_+$.
Non traitée.

On fixe $z_0 = \alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$z_{n+1} = f(z_n) \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{z_n - \beta}{z_n + \beta}.$$

8. $\boxed{3\text{ pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n existe et $z_n \in \mathcal{P}_+$.
Non traitée.

9. $\boxed{2\text{ pt}}$ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n existe.
Non traitée.

10. $\boxed{2\text{ pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = (w_n)^2$.
Une ou deux bonnes réponses.

11. $\boxed{1\text{ pt}}$ En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de w_n en fonction de w_0 et de n.
Non réussie.

12. (a) $\boxed{2\text{ pt}}$ Démontrer que $|\beta - 1|^2 < |\beta + 1|^2$.
Peu abordée.

(b) $\boxed{2\text{ pt}}$ En déduire que $|w_0| < 1$.
Non traitée.

(c) $\boxed{2\text{ pt}}$ En déduire également que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|w_n| < 1$.
Non traitée.

13. $\boxed{2\text{ pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \beta\frac{1+w_n}{1-w_n}$.
Une ou deux bonnes réponses.

14. $\boxed{2\text{ pt}}$ On rappelle que pour $q \in \mathbb{C}$, si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$. Conclure en donnant la limite de z_n.
Non réussie.

Problème III - Fonctions usuelles $\boxed{38\text{ pt}}$

On considère les fonctions définies lorsque c'est possible par

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right) \qquad \text{et} \qquad g(x) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right).$$

On souhaite montrer l'égalité suivante :

$$\forall x \in [0;4[, \qquad g(x) = f(x) + \frac{\pi}{2}. \qquad (\bigstar)$$

Partie 1 : Méthode 1, par la dérivation $\boxed{20 \text{ pt}}$

1. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f.

   Bien dans l'ensemble. Quelques réponses avec des défauts de rédaction.

2. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Préciser $f(0)$, $f(2)$ et $f\left(\sqrt{3}+2\right)$.

   Bien dans la grande majorité mais pas pour tout le monde...

3. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer $\mathcal{D}_{f'}$ le domaine de dérivabilité de f.

   Trop de réponses parachutées. Je rappelle qu'il ne suffit pas d'ouvrir l'intervalle, il a y des exemples où cela ne marche pas !

4. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$,

   $$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}.$$

   Un nombre raisonnable de bonnes réponses. A savoir faire absolument, donc à retravailler si vous ne l'avez pas résolue.

5. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer I le domaine de définition de g.

   Moins bien réussie. Quelques-uns se trompent sur le domaine de définition de arctan, impossible ! Mais surtout vous n'arrivez pas à rédiger $\frac{x}{4-x} \geqslant 0$ alors qu'un tableau de signe règle proprement l'affaire !!

6. $\boxed{1 \text{ pt}}$ Préciser $g(0)$ et $g(2)$.

   Facile, réussie majoritairement.

7. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Résoudre l'équation $g(x) = \frac{\pi}{3}$.

   Quelques bonnes réponses mais plusieurs grossièretés : si l'on compose par la fonction tangente, on perd l'équivalent !!! Je rappelle également que $\tan(2a) \neq 2\tan(a)$ en général...

8. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer I' le domaine de dérivabilité de g.

   Là aussi on ne se contente pas d'ouvrir l'intervalle.

9. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que pour tout $x \in I'$,

   $$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}.$$

   Plusieurs beaux succès. Là aussi, à savoir faire, c'est purement technique.

10. $\boxed{3 \text{ pt}}$ Etablir $(\bigstar)$.

    Beaucoup force discrètement le passage de $]0;4[$ à $[0;4[$. Arnaquer ou forcer un résultat ne marche jamais et en plus énerve le correcteur. Conséquence, on perd bien plus de points sur la suite !

Partie 2 : Par de la trigonométrie $\boxed{11 \text{ pt}}$

On fixe $x \in [0;4[$.

11. Soit $u \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

    (a) $\boxed{1 \text{ pt}}$ Exprimer $\tan'(u)$ en fonction de $\tan(u)$.
    Cadeau, c'est du cours. Mais tout le monde ne connait pas ce résultat fondamental.

    (b) $\boxed{1 \text{ pt}}$ Exprimer $\tan'(u)$ en fonction de $\cos(u)$.
    Même remarque. Aucune démonstration n'était exigée.

    (c) $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos^2(\arctan(t)) = \frac{1}{1+t^2}$.
    Bien réussie lorsque l'on avait les deux questions précédentes.

12. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire $\cos(g(x))$.
    Pas du tout réussie et pourtant pas si dure.

13. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Calculer $\cos\left(f(x)+\frac{\pi}{2}\right)$.
    Mieux, plusieurs bonnes réponses.

14. $\boxed{3 \text{ pt}}$ En déduire $(\bigstar)$.
    Non traitée.

Partie 3 : Un peu d'hyperbolique $\boxed{7 \text{ pt}}$

15. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Résoudre l'équation $\text{ch}(y) = \sqrt{2}$, d'inconnue $y \in \mathbb{R}$.

16. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire $A = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid 2\,\text{ch}^2(y) \in [0;4[\right\}$.

17. $\boxed{3 \text{ pt}}$ A l'aide de $(\bigstar)$, montrer que

$$\forall y \in A, \qquad 2\arctan\left(\frac{\text{ch}(y)}{\sqrt{2-\text{ch}^2(y)}}\right) = \arcsin\left(\text{sh}^2(y)\right) + \frac{\pi}{2}.$$