Corrigé du Devoir Surveillé 2
Calcul algébrique, complexes, fonctions usuelles

Problème I - Calcul algébrique

Pour toute suite de réels $(a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}$.

Partie 1 : Quelques sommes classiques

1. On suppose dans cette question que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 3k+3$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{3k+3}{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} 3\frac{k+1}{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} 3 \\ &= 3\,(n+1)\,. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = 3\,(n+1)\,.}$$

2. On suppose dans cette question que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = (k+1)\,\mathrm{e}^k$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)\,\mathrm{e}^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^k\,.$$

On reconnait une somme géométrique de raison $q = \mathrm{e} \neq 1$. Donc

$$S_n = \mathrm{e}^0\,\frac{\mathrm{e}^{n+1}-1}{\mathrm{e}-1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \frac{\mathrm{e}^{n+1}-1}{\mathrm{e}-1}.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On suppose dans cette question que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = (k+1)\,(k+n)^3$.

   (a) On a les égalités entre réels suivantes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)\,(k+n)^3}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} (k+n)^3\,.$$

On pose $\tilde{k} = k+n$. Dès lors, si $k=0$, on a $\tilde{k} = p$, si $k=n$, $\tilde{k} = 2n$ et enfin $k = \tilde{k} - n$. Ainsi,

$$S_n = \sum_{\tilde{k}=n}^{2n} \left(\tilde{k}\right)^3 = \sum_{k=n}^{2n} k^3 \qquad \text{car l'indice est muet.}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \sum_{k=n}^{2n} k^3.}$$

(b) Par la question précédente et la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{2n} k^3 - \sum_{k=1}^{n-1} k^3 \qquad \text{car } n-1 \geqslant 1 \\
&= \left(\frac{(2n)\,(2n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1)\,n}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n^2}{4}\left[(4n+2)^2 - (n-1)^2\right] \\
&= \frac{n^2}{4}\left[16n^2 + 16n + 4 - n^2 + 2n - 1\right] \\
&= \frac{n^2}{4}\left[15n^2 + 18n + 3\right] \\
&= \frac{3n^2}{4}\left(5n^2 + 6n + 1\right).
\end{aligned}$$

On observe que -1 est racine de $5X^2 + 6X + 1$. Donc $5X^2 + 6X + 1 = (X+1)\,(5X+1)$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \frac{3n^2\,(n+1)\,(5n+1)}{4}.}$$

Vérification, si $n = 1$, $S_1 = \sum_{k=0}^{1} (k+1)^3 = 1^3 + 2^3 = 9$ *et* $\frac{3n^2(n+1)(5n+1)}{4} = \frac{3\times2\times6}{4} = 9$ *OK !*

Partie 2 : Une somme binomiale

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^{k+1}}{k+1}.$$

4. Si $n = 0$, on a

$$T_0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \frac{2^{k+1}}{k+1} = \binom{0}{0}\frac{2^1}{1} = 2.$$

Si $n = 1$,

$$T_1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} \frac{2^{k+1}}{k+1} = \binom{1}{0}\frac{2^1}{1} + \binom{1}{1}\frac{2^2}{2} = 2 + 2 = 4.$$

Enfin, si $n = 2$,

$$T_2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} \frac{2^{k+1}}{k+1} = \binom{2}{0}\frac{2^1}{1} + \binom{2}{1}\frac{2^2}{2} + \binom{2}{2}\frac{2^3}{3} = 2 + 2\times 2 + \frac{8}{3} = 6 + \frac{8}{3} = \frac{26}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{T_0 = 2, \qquad T_1 = 4, \qquad T_2 = \frac{26}{3}.}$$

5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0; n]\!]$. Par définition du coefficient binomial, on a

$$\binom{n}{k}\frac{2^{k+1}}{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{2^{k+1}}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!}2^{k+1}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k+1}\frac{2^{k+1}}{n+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))!}\frac{2^{k+1}}{n+1}\\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}\frac{2^{k+1}}{n+1}\\
&= \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n-k)!}\frac{2^{k+1}}{n+1}\\
&= \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!}2^{k+1}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0;n]\!], \qquad \binom{n}{k}\frac{2^{k+1}}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}\frac{2^{k+1}}{n+1}.}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^{k+1}}{k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\frac{2^{k+1}}{n+1}\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}2^{k+1} && \text{car } \frac{1}{n+1} \text{ ne dépend pas de } k.
\end{aligned}$$

Posons $\tilde{k} = k+1$. Quand $k=0$, $\tilde{k}=1$. Quand $k=n$, $\tilde{k}=n+1$. Et $k=\tilde{k}-1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{\tilde{k}=1}^{n+1}\binom{n+1}{\tilde{k}}2^{\tilde{k}}\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}2^{k} && \text{car l'indice est muet}\\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}2^{k}-1\right)\\
&= \frac{1}{n+1}(2+1)^{n+1}-\frac{1}{n+1} && \text{car on reconnait un binôme de Newton}\\
&= \frac{3^{n+1}-1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_n = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}.}$$

Vérification : si $n=0$, $T_0 = \frac{3-1}{1} = 2$ OK ! Si $n=1$, $T_1 = \frac{9-1}{2} = 4$ OK ! Si $n=2$, $T_2 = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$. Pas de doute, nous sommes bons !

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\tilde{k} = n - k$. Quand $k = 0$, $\tilde{k} = n$, quand $\tilde{k} = n$, $k = 0$ et $k = \tilde{k} - n$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
U_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^k\,(n-k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^k\,(n-k+1)} \\
&= \sum_{\tilde{k}=0}^{n} \binom{n}{n-\tilde{k}} \frac{1}{2^{n-\tilde{k}}\,(\tilde{k}+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \frac{1}{2^{n-k}\,(k+1)} && \text{car l'indice est muet} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{2^n\,(k+1)} && \text{car } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^{k+1}}{2^{n+1}\,(k+1)} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^{k+1}}{k+1} \\
&= \frac{T_n}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Conclusion, par la question précédente,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = \frac{3^{n+1}-1}{2^{n+1}\,(n+1)}}$$

Vérification : si $n = 0$, $U_0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \frac{1}{2^k(0-k+1)} = \frac{1}{1} = 1$ *et* $\frac{3^{n+1}-1}{2^{n+1}(n+1)} = \frac{3-1}{2} = 1$ *OK !*

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On admet que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$. Nous sommes en présence d'une somme double triangulaire. Sommons en interne sur i et donc en externe sur j :

$$\begin{aligned}
V_n &= \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{n}{j} \frac{2^i}{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \binom{n}{j} \frac{2^i}{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^{j} 2^i.
\end{aligned}$$

On reconnait dans la somme interne une somme géométrique de raison $2 \neq 1$,

$$\begin{aligned}
V_n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{j+1} 2^0 \frac{2^{j+1}-1}{2-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{2^j-1}{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{2^{j+1}}{j+1} - \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{j+1}.
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{1}{j+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ et on reconnait T_n dans la première somme. Donc

$$\begin{aligned}V_n &= T_n-\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\\ &= \frac{3^{n+1}-1}{n+1}-\frac{2^{n+1}-1}{n+1} && \text{par la question 6.}\\ &= \frac{3^{n+1}-1-2^{n+1}+1}{n+1}\\ &= \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad V_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}.}$$

Vérification : si $n=0$, $V_0=\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant 0}\binom{0}{j}\frac{2^i}{j+1}=\frac{1}{1}=1$ *et* $\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}=\frac{3-2}{1}=1$. *OK !*

Partie 3 : Une intégration par partie sur les sommes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\qquad\text{et}\qquad G_n=\sum_{k=1}^{n}kH_k.$$

On souhaite exprimer G_n en fonction de H_{n+1} par deux méthodes.

9. Soit $k\in\mathbb{N}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$u_k\left(v_{k+1}-v_k\right)+\left(u_{k+1}-u_k\right)v_{k+1}=u_kv_{k+1}-u_kv_k+u_{k+1}v_{k+1}-u_kv_{k+1}=u_{k+1}v_{k+1}-u_kv_k.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\qquad u_k\left(v_{k+1}-v_k\right)+\left(u_{k+1}-u_k\right)v_{k+1}=u_{k+1}v_{k+1}-u_kv_k.}$$

10. Par la question précédente,

$$\forall k\in\mathbb{N},\qquad u_k\left(v_{k+1}-v_k\right)=u_{k+1}v_{k+1}-u_kv_k-\left(u_{k+1}-u_k\right)v_{k+1}.$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En sommant entre 1 et n, on a

$$\sum_{k=1}^{n}u_k\left(v_{k+1}-v_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[u_{k+1}v_{k+1}-u_kv_k\right]-\sum_{k=1}^{n}\left(u_{k+1}-u_k\right)v_{k+1}.$$

On reconnait une somme télescopique, donc

$$\sum_{k=1}^{n}u_k\left(v_{k+1}-v_k\right)=u_{n+1}v_{n+1}-u_1v_1-\sum_{k=1}^{n}\left(u_{k+1}-u_k\right)v_{k+1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \sum_{k=1}^{n}u_k\left(v_{k+1}-v_k\right)=u_{n+1}v_{n+1}-u_1v_1-\sum_{k=1}^{n}\left(u_{k+1}-u_k\right)v_{k+1}\qquad(\bigstar).}$$

11. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = k^2$ et $v_k = k-1$. Par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
(\bigstar) \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} u_k \left(v_{k+1} - v_k\right) = u_{n+1}v_{n+1} - u_1 v_1 - \sum_{k=1}^{n} \left(u_{k+1} - u_k\right) v_{k+1} \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 \left(k+1-1-(k-1)\right) = (n+1)^2 (n+1-1) - 1 \times 0 \\
&\qquad\qquad - \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^2 - k^2\right)(k+1-1) \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^2 n - \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 + 2k + 1 - k^2\right) k \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^2 n - \sum_{k=1}^{n} (2k+1) k \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^2 n - 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k.
\end{aligned}$$

Posons $A_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$. Dès lors,

$$A_n = (n+1)^2 n - 2A_n - \sum_{k=1}^{n} k \qquad \Leftrightarrow \qquad 3A_n = (n+1)^2 n - \sum_{k=1}^{n} k.$$

Or on sait que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Donc

$$3A_n = (n+1)^2 n - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\left(2(n+1)-1\right) = \frac{n(n+1)}{2}(2n+1).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

12. *Méthode 1.*

(a) On définit la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant $v_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_{k+1} - v_k = k$. Soit $n \in \mathbb{N}$. En sommant, entre 0 et n, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \left(v_{k+1} - v_k\right) = \sum_{k=0}^{n} k.$$

A gauche, on reconnait une somme télescopique tandis qu'à droite on reconnait la somme des premiers entiers :

$$v_{n+1} - v_0 = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad v_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{car } v_0 = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = H_k$. Alors, $(\bigstar)$ donne :

$$\begin{aligned}
(\bigstar) \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} u_k \left(v_{k+1} - v_k\right) = u_{n+1}v_{n+1} - u_1 v_1 - \sum_{k=1}^{n} \left(u_{k+1} - u_k\right) v_{k+1} \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} H_k \left(\frac{k\,(k+1)}{2} - \frac{(k-1)\,k}{2}\right) = H_{n+1}\frac{n\,(n+1)}{2} - H_1 \times 0 \\
&\qquad\qquad - \sum_{k=1}^{n} \left(H_{k+1} - H_k\right) \frac{k\,(k+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Or $H_{k+1} - H_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = \frac{1}{k+1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(\bigstar) \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} H_k \left(\frac{k}{2}\,(k+1-k+1)\right) = H_{n+1}\frac{n\,(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\frac{k\,(k+1)}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} kH_k = H_{n+1}\frac{n\,(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad G_n = H_{n+1}\frac{n\,(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\frac{n\,(n+1)}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad G_n = H_{n+1}\frac{n\,(n+1)}{2} - \frac{n\,(n+1)}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad G_n = \frac{(2H_{n+1} - 1)\,n\,(n+1)}{4}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad G_n = \frac{(2H_{n+1} - 1)\,n\,(n+1)}{4}.}$$

Vérification, si $n = 1$, on a $G_1 = \sum_{k=1}^{1} kH_k = 1 \times H_1 = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i} = 1$ et $\frac{(2H_{n+1}-1)n(n+1)}{4} = \frac{(2H_2-1)(2)}{4} = \frac{2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)-1}{2} = \frac{2\frac{3}{2}-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$. OK !

13. *Méthode 2.*

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition,

$$G_n = \sum_{k=1}^{n} kH_k.$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $H_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$. Donc

$$G_n = \sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{k}{i}.$$

On reconnait une somme double triangulaire. Donc

$$G_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} \frac{k}{i}.$$

Or l'indice de sommation est muet. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad G_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{j}{i}.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question précédente, en inversant l'ordre de sommation,

$$\begin{aligned}
G_n &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{j}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{j}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \sum_{j=i}^{n} j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \left(\sum_{j=0}^{n} j - \sum_{j=0}^{i-1} j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(i-1)i}{2} \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \left(H_{n+1} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{2} \\
&= \frac{n}{2} \left((n+1) H_{n+1} - 1 - \frac{n+1}{2} + 1 \right) \\
&= \frac{n}{2} \left((n+1) H_{n+1} - 1 - \frac{n+1}{2} \right) \\
&= \frac{n(n+1)(2H_{n+1} - 1)}{4}.
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien l'expression de la question 12.b

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad G_n = \frac{n(n+1)(2H_{n+1} - 1)}{4}.}$$

Problème II - Complexes

Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on définit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z^2+\alpha}{2z} \end{array}$$

Partie 1 : Quelques calculs

1. On sait que $2i = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$. De plus, on a les égalités entre complexes suivantes :

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}\,.$$

Conclusion, les formes polaires demandées sont données par

$$\boxed{2i = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}, \qquad \sqrt{3} - i = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}\,.}$$

2. On suppose que $\alpha = 4i$.

   (a) Par définition de f, on a les égalités suivantes entre complexes :

$$\begin{aligned} f(2i) &= \frac{(2i)^2 + 4i}{4i} \\ &= \frac{-4+4i}{4i} \\ &= \frac{-1+i}{i} \\ &= (-1+i)(-i) \\ &= i+1. \end{aligned}$$

Puis,

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(2i) = 1 + i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,.}$$

(b) De la même façon,

$$\begin{aligned}
f\left(\sqrt{3}-i\right) &= \frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^2+4i}{2\left(\sqrt{3}-i\right)} \\
&= \frac{3-2\sqrt{3}i-1+4i}{2\left(\sqrt{3}-i\right)} \\
&= \frac{2-2\sqrt{3}i+4i}{2\left(\sqrt{3}-i\right)} \\
&= \frac{1-\sqrt{3}i+2i}{\sqrt{3}-i} \\
&= \frac{\left(1-\sqrt{3}i+2i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)}{3+1} \\
&= \frac{\sqrt{3}+i-3i+\sqrt{3}+2\sqrt{3}i-2}{4} \\
&= \frac{2\sqrt{3}-2-2i+2\sqrt{3}i}{4} \\
&= \frac{\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}-1\right)i}{2} \\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{2}\left(1+i\right).
\end{aligned}$$

De là, on en déduit que

$$f\left(\sqrt{3}-i\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f\left(\sqrt{3}-i\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\left(1+i\right) = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}.}$$

3. On suppose que $\alpha = 1$.

(a) Soit $z \in \mathbb{U}$. Notamment, $z \neq 0$, donc $f(z)$ existe. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f(z) \in \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad f(z) = \overline{f(z)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z^2+1}{2z} = \overline{\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)} \\
&\Leftrightarrow \quad z^2\overline{z}+\overline{z} = z\overline{z}^2+z \qquad \text{car } z \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad z\left|z\right|^2+\overline{z} = \overline{z}\left|z\right|^2+z \\
&\Leftrightarrow \quad z+\overline{z} = \overline{z}+z \qquad \text{car } z \in \mathbb{U} \text{ i.e. } \left|z\right| = 1.
\end{aligned}$$

La dernière assertion étant vraie, on en conclut que

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{U}, \qquad f(z) \in \mathbb{R}.}$$

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$\begin{aligned} f\left(\mathrm{e}^{i\,\theta}\right) &= \frac{\left(\mathrm{e}^{i\,\theta}\right)^2+1}{2\,\mathrm{e}^{i\,\theta}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2i\,\theta}+1}{2\,\mathrm{e}^{i\,\theta}} \\ &= \frac{\left(\mathrm{e}^{2i\,\theta}+1\right)\mathrm{e}^{-i\,\theta}}{2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{i\,\theta}+\mathrm{e}^{-i\,\theta}}{2} \\ &= \cos(\theta) \qquad \text{par la formule d'Euler.} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \qquad f\left(\mathrm{e}^{i\,\theta}\right) = \cos(\theta)\,.}$$

(c) On procède comme indiqué par double inclusion. Montrons que $f(\mathbb{U}) \subseteq [-1;1]$. Soit $z \in f(\mathbb{U})$. Par définition, il existe $u \in \mathbb{U}$ tel que $z = f(u)$. Puisque $u \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u = \mathrm{e}^{i\,\theta}$. Donc par la question précédente,

$$z = f(u) = f\left(\mathrm{e}^{i\,\theta}\right) = \cos(\theta)\,.$$

En particulier,

$$z = \cos(\theta) \in [-1;1]\,.$$

On a donc établi que pour tout $x \in f(\mathbb{U})$, $z \in [-1;1]$. Par conséquent,

$$f(\mathbb{U}) \subseteq [-1;1]\,.$$

Réciproquement, soit $x \in [-1;1]$. Alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(\theta)$ (en posant $\theta = \arccos(x)$ par exemple). Donc par la question précédente,

$$x = \cos(\theta) = f\left(\mathrm{e}^{i\,\theta}\right).$$

Posons $u = \mathrm{e}^{i\,\theta}$. Alors $u \in \mathbb{U}$ et par suite, $f(u) \in f(\mathbb{U})$. Ainsi,

$$x = f(u) \in f(\mathbb{U})\,.$$

Finalement, pour tout $x \in [-1;1]$, on a $x \in f(\mathbb{U})$ et donc

$$[-1;1] \subseteq f(\mathbb{U})\,.$$

Conclusion, par double inclusion,

$$\boxed{f(\mathbb{U}) = [-1;1]\,.}$$

4. On suppose que $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z \in f^{\leftarrow}(i\mathbb{R}) \quad &\Leftrightarrow \quad f(z) \in i\mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad f(z) = -\overline{f(z)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z^2+\alpha}{2z} = -\frac{\overline{z}^2+\alpha}{2\overline{z}} \qquad \text{car } \overline{\alpha} = \alpha \text{ car } \alpha \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z^2+\alpha\right) 2\overline{z} = -2z\left(\overline{z}^2+\alpha\right) \qquad \text{car } z \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2z\left|z\right|^2 + 2\alpha\overline{z} = -2\overline{z}\left|z\right|^2 - 2z\alpha \\
&\Leftrightarrow \quad z\left|z\right|^2 + \alpha\overline{z} = -\overline{z}\left|z\right|^2 - z\alpha \\
&\Leftrightarrow \quad \left|z\right|^2\left(z+\overline{z}\right) + \alpha\left(z+\overline{z}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\left|z\right|^2+\alpha\right)\left(z+\overline{z}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad z+\overline{z} = 0 \qquad \text{car } \left|z\right|^2 \geqslant 0 \text{ et } \alpha > 0 \text{ donc } \left|z\right|^2+\alpha > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\mathrm{Re}\left(z\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad z \in i\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f^{\leftarrow}(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R} \setminus \{0\}.}$$

Partie 2 : Etude d'une suite complexe

Soit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\left(\beta\right) > 0$. On pose alors $\alpha = \beta^2$ et on note

$$\mathcal{P}_+ = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}\left(\frac{z}{\beta}\right) > 0 \right\}.$$

5. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$.

   (a) On sait que $z \notin i\mathbb{R}$, donc $\boxed{z \neq 0}$ et

   $$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

   Conclusion, la forme algébrique de $1/z$ est donnée par

   $$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.}$$

   (b) Par définition, $\mathrm{Re}\left(z\right) = a$ et par la question précédente, $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a}{a^2+b^2}$. Ainsi,

   $$\mathrm{Re}\left(z\right)\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a^2}{a^2+b^2}.$$

   Donc $\mathrm{Re}\left(z\right)\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \geqslant 0$. Montrons que $\mathrm{Re}\left(z\right)\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \neq 0$. Procédons par l'absurde, supposons $\mathrm{Re}\left(z\right)\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ i.e. $\frac{a^2}{a^2+b^2} = 0$ et donc nécessairement $a = 0$ ou encore $z = ib \in i\mathbb{R}$, ce qui contredit l'hypothèse initiale. Conclusion,

   $$\boxed{\mathrm{Re}\left(z\right)\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 0.}$$

6. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{z}{\beta} \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$. Posons $z' = \frac{z}{\beta}$. Puisque $z' \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$, par la question précédente,

$$\mathrm{Re}\left(z'\right)\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z'}\right) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Re}\left(\frac{z}{\beta}\right)\mathrm{Re}\left(\frac{\beta}{z}\right) > 0.$$

Or, par définition de α, $\frac{\alpha}{\beta z} = \frac{\beta^2}{\beta z} = \frac{\beta}{z}$. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\beta}\right)\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{\beta z}\right) > 0.}$$

7. Montrons que $f(\mathcal{P}_+) \subseteq \mathcal{P}_+$. Soit $z \in f(\mathcal{P}_+)$. Montrons que $z \in \mathcal{P}_+$. Par définition, il existe $z_1 \in \mathcal{P}_+$ tel que $z = f(z_1)$. Puisque $z_1 \in \mathcal{P}_+$, on a $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\beta}\right) > 0$. Nécessairement, $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\beta}\right) \neq 0$ et donc $\frac{z_1}{\beta} \notin i\mathbb{R}$. Par la question précédente,
$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\beta}\right)\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{\beta z_1}\right) > 0.$$
Comme $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\beta}\right) > 0$, on obtient
$$\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{\beta z_1}\right) > 0.$$
On veut montrer que $z \in \mathcal{P}_+$ i.e. $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\beta}\right) > 0$. On a
$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\beta}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{f(z_1)}{\beta}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{z_1^2+\alpha}{2z_1\beta}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\beta}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{z_1\beta}\right).$$
Or, on a vu précédemment que $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{\beta}\right) > 0$ et que $\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{\beta z_1}\right) > 0$. D'où,
$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\beta}\right) > 0.$$
Ou encore $z \in \mathcal{P}_+$. Donc on a montré que pour tout $z \in f(\mathcal{P}_+)$, $z \in \mathcal{P}_+$. Conclusion,
$$\boxed{f(\mathcal{P}_+) \subseteq \mathcal{P}_+.}$$

On fixe $z_0 = \alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$z_{n+1} = f(z_n) \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{z_n - \beta}{z_n + \beta}.$$

8. On procède par récurrence. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathscr{P}(n) : \qquad \text{« } z_n \text{ existe et } z_n \in \mathcal{P}_+ \text{ »}$$
Initialisation. Si $n = 0$, par définition, $z_0 = \alpha$. Donc z_0 existe. Montrons que $\alpha \in \mathcal{P}_+$. On a,
$$\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\beta^2}{\beta}\right) = \mathrm{Re}(\beta) > 0 \qquad \text{par hypothèse.}$$
Donc $z_0 = \alpha \in \mathcal{P}_+$ et ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Par hypothèse de récurrence, z_n existe et $z_n \in \mathcal{P}_+$. Donc $\mathrm{Re}\left(\frac{z_n}{\beta}\right) > 0$. Nécessairement, $\frac{z_n}{\beta} \neq 0$ ou encore $z_n \neq 0$. Donc $z_{n+1} = f(z_n)$ existe. De plus, $z_n \in \mathcal{P}_+$. Donc, par la question 7.,
$$z_{n+1} = f(z_n) \in f(\mathcal{P}_+) \subseteq \mathcal{P}_+,$$
ce qui démontre $\mathscr{P}(n+1)$.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_n \text{ existe et } z_n \in \mathcal{P}_+.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $z_n \in \mathcal{P}_+$, on a $\mathrm{Re}\left(\frac{z_n}{\beta}\right) > 0$. Supposons $z_n + \beta = 0$. Alors $z_n = -\beta$ et par suite, $\mathrm{Re}\left(\frac{z_n}{\beta}\right) = \mathrm{Re}\left(-1\right) = -1 < 0$, contradiction. Donc $z_n + \beta \neq 0$. Ainsi, $w_n = \frac{z_n - \beta}{z_n + \beta}$ existe. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n \text{ existe.}}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{z_{n+1} - \beta}{z_{n+1} + \beta} \\ &= \frac{f\left(z_n\right) - \beta}{f\left(z_n\right) + \beta} \\ &= \frac{\frac{z_n^2 + \alpha}{2z_n} - \beta}{\frac{z_n^2 + \alpha}{2z_n} + \beta} \\ &= \frac{z_n^2 - 2z_n\beta + \alpha}{z_n^2 + 2z_n\beta + \alpha} \\ &= \frac{z_n^2 - 2z_n\beta + \beta^2}{z_n^2 + 2z_n\beta + \beta^2} \\ &= \frac{\left(z_n - \beta\right)^2}{\left(z_n + \beta\right)^2} \\ &= w_n^2. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_{n+1} = \left(w_n\right)^2.}$$

11. Par la question précédente, on a $w_1 = w_0^2$, puis $w_2 = w_1^2 = \left(w_0^2\right)^2 = w_0^4$, $w_3 = \left(w_0^4\right)^2 = w_0^8$. Par récurrence, on montre que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n = w_0^{2^n}.}$$

12. (a) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \left|\beta - 1\right|^2 < \left|\beta + 1\right|^2 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \left|\beta\right|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\beta\overline{1}\right) + 1 < \left|\beta\right|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\beta\overline{1}\right) + 1 \\ &\Leftrightarrow \qquad 4\mathrm{Re}\left(\beta\right) > 0. \end{aligned}$$

La dernière assertion est vraie par hypothèse. Conclusion,

$$\boxed{\left|\beta - 1\right|^2 < \left|\beta + 1\right|^2.}$$

(b) Par définition,

$$\left|w_0\right| = \left|\frac{z_0 - \beta}{z_0 + \beta}\right| = \left|\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right| = \left|\frac{\beta^2 - \beta}{\beta^2 + \beta}\right| = \left|\frac{\beta - 1}{\beta + 1}\right|. \qquad \text{car } \beta \neq 0 \text{ car } \mathrm{Re}\left(\beta\right) > 0$$

Or par la question précédente, $\left|\beta - 1\right|^2 < \left|\beta + 1\right|^2$ i.e. par la stricte croissante de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, $\left|\beta - 1\right| < \left|\beta + 1\right|$. Ainsi,

$$\left|w_0\right| = \left|\frac{\beta - 1}{\beta + 1}\right| < 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\left|w_0\right| < 1.}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la strict croissance de la fonction $x \mapsto x^{2^n}$ sur $\mathbb{R}_+$, on déduit de la question précédente que

$$|w_0|^{2^n} < 1^{2^n} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|w_0^{2^n}\right| < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad |w_n| < 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |w_n| < 1.}$$

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} w_n = \frac{z_n - \beta}{z_n + \beta} \qquad &\Leftrightarrow \qquad w_n\left(z_n + \beta\right) = z_n - \beta \qquad \text{car on a vu que } z_n + \beta \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad z_n\left(w_n - 1\right) = -\beta - w_n\beta. \end{aligned}$$

Par la question précédente, $|w_n| < 1$ donc $w_n \neq 1$. Ainsi,

$$z_n = \frac{-\beta - w_n\beta}{w_n - 1} = \beta\frac{1 + w_n}{1 - w_n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_n = \beta\frac{1 + w_n}{1 - w_n}.}$$

14. On rappelle que pour $q \in \mathbb{C}$, si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. On a vu que $|w_0| < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$. Donc par composée de limites,

$$\lim_{n\to+\infty} w_0^{2^n} = \lim_{p\to+\infty} w_0^p = 0.$$

Donc par la question précédente, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \beta\frac{1 + w_n}{1 - w_n} = \beta.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} z_n = \beta.}$$

En construisant ainsi récursivement $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $z_{n+1} = f\left(z_n\right)$, on construit une suite qui converge vers une racine carrée de α.

Problème III - Fonctions usuelles

On considère les fonctions définies lorsque c'est possible par

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right) \qquad \text{et} \qquad g(x) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right).$$

On souhaite montrer l'égalité suivante :

$$\forall x \in [0;4[\,, \qquad g(x) = f(x) + \frac{\pi}{2}. \qquad (\bigstar)$$

Partie 1 : Méthode 1, par la dérivation

1. Soit $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$x \in \mathcal{D}_f \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant \frac{x}{2} - 1 \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x \leqslant 4.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{D}_f = [0;4]\,.}$$

2. On a

$$\begin{aligned} f(0) &= \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \\ f(2) &= \arcsin\left(\frac{2}{2} - 1\right) = \arcsin(0) = 0 \\ f\left(\sqrt{3}+2\right) &= \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2} - 1\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(0) = -\frac{\pi}{2}, \qquad f(2) = 0, \qquad f\left(\sqrt{3}+2\right) = \frac{\pi}{3}.}$$

NB : on observe bien que $0 \in [0;4]$, $2 \in [0;4]$ *et* $0 < \sqrt{3}+2 \leqslant 2+2 = 4$.

3. Soit $\mathcal{D}_{f'}$ le domaine de dérivabilité de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_{f'} \quad &\Leftarrow \quad -1 < \frac{x}{2} - 1 < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{x}{2} < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < x < 4. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D}_{f'} =]0;4[\,.}$$

4. Soit $x \in \mathcal{D}_{f'}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1/2}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}+x-1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x-\frac{x^2}{4}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x\,(4-x)}}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]0;4\right[, \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x\,(4-x)}}.}$$

5. Soit I le domaine de définition de g. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in I \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{x}{4-x}} \text{ existe} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4-x \neq 0 \\ \frac{x}{4-x} \geqslant 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 4-x > 0 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x \leqslant 0 \\ 4-x < 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 4 > x \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x \leqslant 0 \\ 4 < x \end{cases} \quad \text{impossible} \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x < 4.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I = \left[0;4\right[.}$$

6. On a

$$g(0) = 2\arctan(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(2) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{4-2}}\right) = 2\arctan(1) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(2) = \frac{\pi}{2}.}$$

On note bien que $0 \in I$ et $2 \in I$.

7. Soit $x \in I$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
g(x) = \frac{\pi}{3} \quad &\Leftrightarrow \quad 2\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right) = \frac{\pi}{3} \\
&\Leftrightarrow \quad \arctan\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right) = \frac{\pi}{6} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{x}{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{par injectivité de la fonction arctan.}
\end{aligned}$$

Attention à ne pas composer par la fonction tangente qui n'est pas injective elle !

$$\begin{aligned}
g(x) = \frac{\pi}{3} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{4-x} = \frac{1}{3} \qquad \text{car } \frac{x}{4-x} \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 3x = 4-x \qquad \text{car } 4-x \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 4x = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 1.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{g(x) = \frac{\pi}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1.}$$

Vérification, si $x = 1$, $g(1) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{4-1}}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ OK !

8. Soit I' le domaine de dérivabilité de g. Soit $x \in I$ (sinon $g(x)$ n'est même pas définie). On a

$$\begin{aligned} x \in I' \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{4-x} > 0 \text{car } u \mapsto \sqrt{u} \text{ n'est pas dérivable en } 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ 4-x > 0 \end{cases} \qquad \text{car } x \geqslant 0 \text{ car } x \in I \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < x < 4. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I' =]0;4[\,.}$$

9. Soit $x \in I'$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right)'}{1+\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right)^2} \\ &= 2\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{4-x}}}\left(\frac{x}{4-x}\right)'\frac{1}{1+\frac{x}{4-x}} \\ &= \sqrt{\frac{4-x}{x}}\frac{4-x+x}{(4-x)^2}\frac{1}{1+\frac{x}{4-x}} \\ &= \sqrt{\frac{4-x}{x}}\frac{4}{(4-x)^2}\frac{4-x}{4-x+x} \\ &= \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x}}\frac{1}{4-x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{4-x}} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]0;4[\,, \qquad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x\,(4-x)}}.}$$

10. Par les questions 4. et 9.

$$\forall x \in]0;4[\,, \qquad f'(x) = g'(x).$$

Puisque $]0;4[$ est un intervalle, on en déduit que

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in]0;4[\,, \qquad f(x) = g(x) + C.$$

En évaluant en 2, par les questions 2. et 6.

$$f(2) = g(2) + C \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = \frac{\pi}{2} + C \qquad \Leftrightarrow \qquad C = -\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi,

$$\forall x \in]0;4[\,, \qquad f(x) = g(x) - \frac{\pi}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) + \frac{\pi}{2} = g(x).$$

Or par passage à la limite quand $x \to 0$, par continuité de la fonction f en 0 de la fonction g en 0,

$$f(0) + \frac{\pi}{2} = g(0).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in [0;4[\,, \qquad g(x) = f(x) + \frac{\pi}{2}. \qquad (\bigstar)}$$

Partie 2 : Par de la trigonométrie

On fixe $x \in [0;4[$.

11. Soit $u \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

    (a) La fonction tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc en u et
    $$\boxed{\tan'(u) = 1 + \tan^2(u).}$$

    (b) D'autre part, on sait également que
    $$\boxed{\tan'(u) = \frac{1}{\cos^2(u)}.}$$

    (c) Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons $u = \arctan(t)$. Alors $u \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Donc par les deux questions précédentes,
    $$\begin{aligned} 1+\tan^2(u) = \frac{1}{\cos^2(u)} \quad &\Leftrightarrow \quad \cos^2(u) = \frac{1}{1+\tan^2(u)} \qquad \text{car } \begin{cases}\cos^2(u) > 0 \\ 1+\tan^2(u) > 0\end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \cos^2(\arctan(t)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(t))} \\ &\Leftrightarrow \quad \cos^2(\arctan(t)) = \frac{1}{1+t^2} \end{aligned}$$
    Conclusion,
    $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \cos^2(\arctan(t)) = \frac{1}{1+t^2}.}$$

12. On sait que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$. Donc,
    $$\begin{aligned} \cos(g(x)) &= \cos\left(2\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right)\right) \\ &= 2\cos^2\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right)\right) - 1 \\ &= 2\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right)^2} - 1 \qquad \text{par la question précédente avec } t = \sqrt{\frac{x}{4-x}} \\ &= 2\frac{1}{1+\frac{x}{4-x}} - 1 \\ &= 2\frac{4-x}{4-x+x} - 1 \\ &= \frac{4-x}{2} - 1 \\ &= \frac{2-x}{2}. \end{aligned}$$
    Conclusion,
    $$\boxed{\cos(g(x)) = 1 - \frac{x}{2}.}$$

13. On a les égalités entre réels suivantes :
    $$\begin{aligned} \cos\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(f(x)) \\ &= -\sin\left(\arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right)\right) \\ &= -\left(\frac{x}{2} - 1\right) \\ &= 1 - \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos\left(f(x)+\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{x}{2}.}$$

14. Par les deux questions précédentes,

$$\cos\left(g(x)\right)=1-\frac{x}{2}=\cos\left(f(x)+\frac{\pi}{2}\right).$$

Donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que

$$g(x)=f(x)+\frac{\pi}{2}+2k\pi \qquad \text{OU} \qquad g(x)=-f(x)-\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

Or pour tout $u\in[-1;1]$, $\arcsin(u)\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Donc

$$f(x)\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x)+\frac{\pi}{2}\in[0;\pi].$$

D'autre part, pour tout $u\in\mathbb{R}_+$, $\arctan(u)\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$. Donc pour $u=\sqrt{\frac{x}{4-x}}\in\mathbb{R}_+$,

$$g(x)=2\arctan(u)\in[0;\pi[.$$

Nécessairement, $k=0$ et

$$g(x)=f(x)+\frac{\pi}{2}.$$

Ceci est vrai pour $x\in[0;4[$ quelconque. Conclusion,

$$\boxed{\forall x\in[0;4[, \qquad g(x)=f(x)+\frac{\pi}{2}. \qquad (\bigstar)}$$

Partie 3 : Un peu d'hyperbolique

15. Soit $y\in\mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{ch}(y)=\sqrt{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}}{2}=\sqrt{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}=2\sqrt{2}.$$

Posons $X=\mathrm{e}^y$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(y)=\sqrt{2} \qquad &\Leftrightarrow \qquad X+\frac{1}{X}=2\sqrt{2}\\
&\Leftrightarrow \qquad X^2+1=2\sqrt{2}X \qquad \text{car } X=\mathrm{e}^y\neq 0\\
&\Leftrightarrow \qquad X^2-2\sqrt{2}X+1=0.
\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta=8-4=4$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(y)=\sqrt{2} \qquad &\Leftrightarrow \qquad X=\frac{2\sqrt{2}+2}{2}=\sqrt{2}+1 \ \text{ OU } \ X=\sqrt{2}-1\\
&\Leftrightarrow \qquad \mathrm{e}^y=\sqrt{2}+1 \ \text{ OU } \ \mathrm{e}^y=\sqrt{2}-1\\
&\Leftrightarrow \qquad y=\ln\left(\sqrt{2}+1\right) \ \text{ OU } \ y=\ln\left(\sqrt{2}-1\right) \qquad \text{car } \sqrt{2}+1>0 \text{ et } \sqrt{2}-1>0.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\ln\left(\sqrt{2}+1\right);\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right\}.}$$

16. Soit $A = \left\{ y \in \mathbb{R} \;\middle|\; 2\,\mathrm{ch}^2(y) \in [0;4[\right\}$. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \in A \quad &\Leftrightarrow \quad 2\,\mathrm{ch}^2(y) \in [0;4[\\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 2ch^2\,(y) < 4 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \mathrm{ch}^2\,(y) < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad -\sqrt{2} < \mathrm{ch}(y) < \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{ch}(y) < \sqrt{2} \qquad \text{car } \mathrm{ch}(y) \geqslant 1. \end{aligned}$$

Or par le graphe de la fonction ch et la question précédente, on obtient

x	$-\infty$		$\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$		0		$\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$		$+\infty$
ch	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Conclusion,

$$\boxed{A = \left]\ln\left(\sqrt{2}-1\right);\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right[.}$$

17. Soit $y \in A$. Posons $x = 2\,\mathrm{ch}^2(y)$. Par définition de A, $x \in [0;4[$. Donc par ($\bigstar$),

$$\begin{aligned} & g(x) = f(x) + \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & 2\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right) = \arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right) + \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & 2\arctan\left(\sqrt{\frac{2\,\mathrm{ch}^2(y)}{4-2\,\mathrm{ch}^2(y)}}\right) = \arcsin\left(\frac{2\,\mathrm{ch}^2(y)}{2}-1\right) + \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & 2\arctan\left(\sqrt{\frac{\mathrm{ch}^2(y)}{2-\mathrm{ch}^2(y)}}\right) = \arcsin\left(\mathrm{ch}^2(y)-1\right) + \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & 2\arctan\left(\frac{\mathrm{ch}(y)}{\sqrt{2-\mathrm{ch}^2(y)}}\right) = \arcsin\left(\mathrm{ch}^2(y)-1\right) + \frac{\pi}{2} \qquad \text{car } \mathrm{ch}(y) > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2\arctan\left(\frac{\mathrm{ch}(y)}{\sqrt{2-\mathrm{ch}^2(y)}}\right) = \arcsin\left(\mathrm{sh}^2(y)\right) + \frac{\pi}{2} \qquad \text{car } \mathrm{ch}^2(y)-1 = \mathrm{sh}^2(y). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in A, \qquad 2\arctan\left(\frac{\mathrm{ch}(y)}{\sqrt{2-\mathrm{ch}^2(y)}}\right) = \arcsin\left(\mathrm{sh}^2(y)\right) + \frac{\pi}{2}.}$$