Epreuve de mathématiques 3
2023-2024

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

lycée Raoul Follereau

Problème 1 - Equations complexes

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & az + 3 - i \end{array}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$f_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

En particulier, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f_1(z) = f(z)$, $f_2(z) = f \circ f(z) = f\left(f(z)\right)$ etc.
On pose également,

$$z_n = f_n\left(2 + i\right).$$

Partie 1 : A l'ordre 1

1. Déterminer $a \in \mathbb{C}$ pour que $z_1 = 0$ et préciser la forme polaire du a obtenu.
2. On suppose dans cette question que $a = i$.
   (a) A quelle similitude correspond f ?
   (b) Calculer z_1 et $f\left(-1 + 3i\right)$.
   (c) Soient $A\left(-2i\right)$, $B\left(2 + i\right)$ et $C\left(-1 + 3i\right)$. Quelle est la nature de ABC ? Le tracer.
3. Déterminer $\mathscr{D}$ l'ensemble des complexes $a \in \mathbb{C}$ tel que $z_1 \in \mathbb{R}$ puis tracer $\mathscr{D}$.
4. Déterminer $\mathscr{C}$ l'ensemble des complexes $a \in \mathbb{C}$ tel que $z_1 \in \mathbb{U}$ puis tracer $\mathscr{C}$.

Partie 2 : A l'ordre 2

5. Déterminer les racines carrées de $U = -8 + 6i$.
6. Préciser pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f_2(z)$ et z_2 en fonction de a.
7. Déterminer l'ensemble des complexes $a \in \mathbb{C}$ tels que $z_2 = 2 + i$.

Partie 3 : A l'ordre n

On note $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ la fonction identité sur $\mathbb{C}$: $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z \end{array}$.

8. Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(z) = a^n z + (3 - i)\sum_{k=0}^{n-1} a^k.$$

On fixe pour la suite $n \in \mathbb{N}^*$.

9. Déterminer l'ensemble des $a \in \mathbb{C}$ tel que $z_n - f_n(0) = 3 - i$.
10. Soit $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \in \mathbb{C}^4$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$\left(\forall z \in \mathbb{C}, \quad \alpha z + \beta = \alpha' z + \beta'\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta'. \end{cases}$$

11. On suppose dans cette question que $a \in \mathbb{U}_n$. Préciser alors f_n.
12. Démontrer que

$$a \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\} \qquad \Leftrightarrow \qquad f_n = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}.$$

13. On suppose que $a \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$.
   (a) Préciser z_n.
   (b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n : $m = qn + r$. Montrer que $z_m = z_r$.

Problème 2 - Intégration

On fixe dans tout ce problème $I =]0;+\infty[$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in I, \qquad F_n(x) = \int_1^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Partie 1 : Quelques calculs de F_k

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que F_n est une fonction bien définie sur I.
2. Soit $x \in I$. Calculer $F_1(x)$.
3. Soit $x \in I$. Calculer $F_2(x)$.
4. Soit $x \in I$. Calculer $F_3(x)$.
5. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall t \in I, \quad \frac{1}{t\,(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}.$$

6. Soit $x \in I$. Calculer $F_0(x)$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, calculer $F_n(x) + F_{n+2}(x)$. En déduire F_4.

Partie 2 : Applications

On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_3(x) = x - \arctan(x) + \frac{\pi}{4} - 1.$$

8. Justifier l'existence puis calculer

$$A = \int_1^{\sqrt{3}} t\arctan(t)\,\mathrm{d}t.$$

9. Justifier l'existence puis calculer

$$B = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{3t}}{1+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t.$$

10. Justifier l'existence puis calculer

$$C = \int_0^3 \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Problème 3 - Equations différentielles d'ordre 1

On considère les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{lrl}
(E^+) & \forall x \in]0;+\infty[\,, & xy'(x)+(1-x)\,y(x)=x \\
(F) & \forall x \in]0;+\infty[\,, & xy'(x)+(1-x)\,y(x)=x+\cos(x) \\
(E^-) & \forall x \in]-\infty;0[\,, & xy'(x)+(1-x)\,y(x)=x \\
(E) & \forall x \in \mathbb{R}, & xy'(x)+(1-x)\,y(x)=x.
\end{array}$$

1. Justifier que la fonction $\lambda_1 : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les déterminer.
2. Justifier que la fonction $\lambda_2 : x \mapsto \cos(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les déterminer.
3. Préciser (E_0^+) l'équation différentielle homogène associée à (E^+) et déterminer $\mathcal{S}_0^+$ l'ensemble des solutions de (E_0^+).

   On donnera les solutions sous forme ensembliste et sous forme d'espace engendré.
4. En déduire $\mathcal{S}^+$ l'ensemble des solutions de l'équation (E^+).
5. Déterminer l'ensemble des solutions de

$$(\mathscr{P}) \ : \quad \begin{cases} y \text{ solution de } (E^+) \\ y(1)=0. \end{cases}$$

6. Déterminer $\mathcal{S}_F$ l'ensemble des solutions de (F).
7. En vous inspirant du résultat de la question 4., déterminer **une** solution de (E^-).
8. En déduire $\mathcal{S}^-$ l'ensemble des solutions de (E^-).
9. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$. En déduire selon les valeurs de $K \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{K\,\mathrm{e}^x-1}{x}.$$

10. Conclure en donnant l'ensemble des solutions de (E).

    Pour la dérivabilité de la solution en 0, *on pourra admettre que* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{-1-\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}-0}{x-0}=\dfrac{1}{2}$.

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(G) \qquad \forall x \in]0;+\infty[\,, \quad x\,\mathrm{sh}(x)z'(x)+\left[(1-x)\,\mathrm{sh}(x)+x\,\mathrm{ch}(x)\right]z(x)=x.$$

11. Soit z une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$. On pose pour tout $x \in]0;+\infty[$, $y(x)=z(x)\,\mathrm{sh}(x)$. Justifier que y est dérivable sur $]0;+\infty[$ puis montrer que z est solution de (G) si et seulement si y est solution d'une équation différentielle que l'on reconnaitra.
12. En déduire $\mathcal{S}_G$ l'ensemble des solutions de (G).