Corrigé du Devoir Surveillé 3
Equations complexes, calculs d'intégrales, équation différentielles d'ordre I

Problème I - Equations complexes

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & az+3-i \end{array}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$f_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

En particulier, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f_1(z) = f(z)$, $f_2(z) = f \circ f(z) = f(f(z))$ etc.
On pose également,

$$z_n = f_n(2+i).$$

Partie 1 : A l'ordre 1

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Par définition de z_1, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z_1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f_1(2+i) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f(2+i) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a(2+i) + 3 - i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a = \frac{-3+i}{2+i} = \frac{(-3+i)(2-i)}{4+1} = \frac{-6+3i+2i+1}{5} = -1+i. \end{aligned}$$

Puis,

$$a = -1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{z_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1+i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}.}$$

2. On suppose dans cette question que $a = i$.

(a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on obtient

$$f(z) = iz + 3 - i.$$

Puisque $a = i \neq 0$, f n'est pas une translation. Cherchons son point fixe. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(\omega) = \omega \quad &\Leftrightarrow \quad i\omega + 3 - i = \omega \\ &\Leftrightarrow \quad (1-i)\omega = 3 - i \\ &\Leftrightarrow \quad \omega = \frac{3-i}{1-i} = \frac{(3-i)(1+i)}{2} = \frac{3+3i-i+1}{2} = 2+i. \end{aligned}$$

Fixons désormais $\omega = 2+i$. Dès lors, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$i(z-\omega) + \omega = i(z-2-i) + 2 + i = iz - 2i + 1 + 2 + i = iz + 3 - i = f(z).$$

D'où

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f(z) = i(z-\omega) + \omega = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}(z-\omega) + \omega.$$

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est une rotation d'angle } \frac{\pi}{2} \text{ et de centre } \omega = 2+i.}$$

(b) Par la question précédente, $\omega = 2 + i$ est le point fixe de f. Donc

$$z_1 = f_1(2+i) = f(\omega) = \omega = 2 + i.$$

D'autre part,

$$f(-1+3i) = -i - 3 + 3 - i = -2i.$$

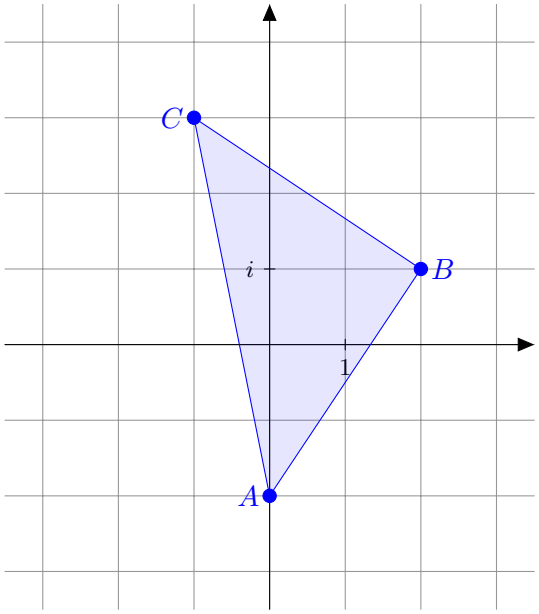
Conclusion,

$$\boxed{z_1 = 2 + i \qquad \text{et} \qquad f(-1+3i) = -2i.}$$

(c) Soient $A(-2i)$, $B(2+i)$ et $C(-1+3i)$. Par la question précédente, C est l'image de A par f. Or f est la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donc C est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Nécessairement,

$$\boxed{ABC \text{ est rectangle isocèle en } B.}$$

On obtient le graphique suivant :



3. Soit $a \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
a \in \mathscr{D} \quad &\Leftrightarrow \quad z_1 \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad f_1(2+i) \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad a(2+i) + 3 - i \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad a(2+i) + 3 - i = \overline{a}(2-i) + 3 + i \\
&\Leftrightarrow \quad 2(a - \overline{a}) + i(a + \overline{a}) = 2i \\
&\Leftrightarrow \quad 4i\mathrm{Im}(a) + 2i\mathrm{Re}(a) = 2i \\
&\Leftrightarrow \quad 2\mathrm{Im}(a) + \mathrm{Re}(a) = 1
\end{aligned}$$

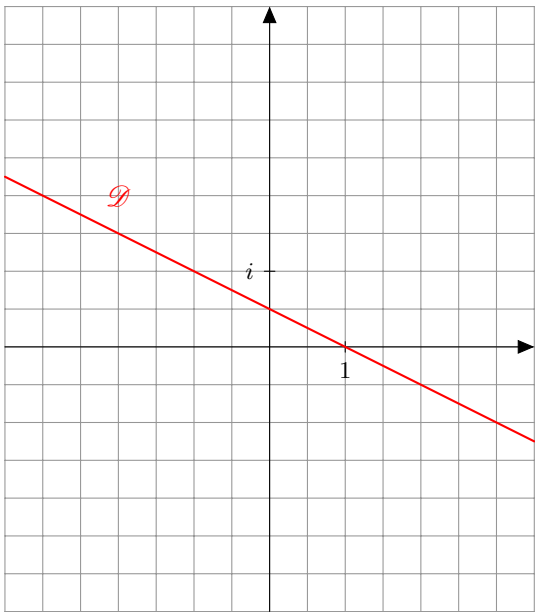
Posons $a = x + iy$. Dès lors,

$$a \in \mathscr{D} \quad \Leftrightarrow \quad 2y + x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{D} = \{a = x + iy \in \mathbb{C} \mid 2y + x = 1\} \text{ est la droite d'équation } y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}.}$$

On obtient



4. Soit $a \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

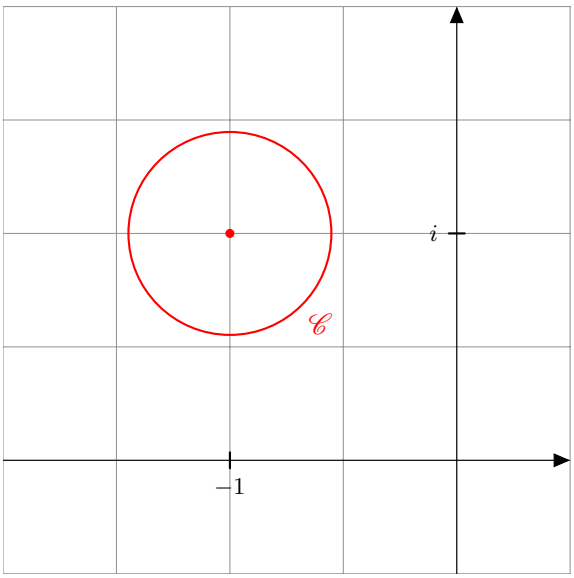
$$\begin{aligned}
a \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad z_1 \in \mathbb{U} \quad &\Leftrightarrow \quad a(2+i)+3-i \in \mathbb{U} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 = |a(2+i)+3-i|^2 = (a(2+i)+3-i)\overline{(a(2+i)+3-i)} \\
&\Leftrightarrow \quad (a(2+i)+3-i)(\overline{a}(2-i)+3+i) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad a\overline{a}(4+1)+a(2+i)(3+i)+\overline{a}(3-i)(2-i)+9+1 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 5|a|^2+a(6+2i+3i-1)+\overline{a}(6-3i-2i-1)+9 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 5|a|^2+a(5+5i)+\overline{a}(5-5i)+9 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad |a|^2+a+\overline{a}+i(a-\overline{a}) = -\frac{9}{5} \\
&\Leftrightarrow \quad |a|^2+2\mathrm{Re}(a)-2\mathrm{Im}(a) = -\frac{9}{5}.
\end{aligned}$$

Posons $a = x+iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$\begin{aligned}
a \in \mathscr{C} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+2x-2y = -\frac{9}{5} \\
&\Leftrightarrow \quad (x+1)^2-1+(y-1)^2-1 = -\frac{9}{5} \\
&\Leftrightarrow \quad (x+1)^2+(y-1) = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ est le cercle de centre } -1+i \text{ et de rayon } \frac{\sqrt{5}}{5}.}$$



Partie 2 : A l'ordre 2

5. Soit $u = x + iy$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
u^2 = U \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+iy)^2 = -8+6i \\ |u|^2 = |U| \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = -8+6i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ 2xy = 6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases} \qquad \text{car } xy > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad u = 1+3i \ \text{ OU } \ u = -1-3i.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des racines carrées de U est

$$\boxed{\mathscr{S} = \{1+3i; -1-3i\}\,.}$$

Vérification : $u^2 = (1+3i)^2 = 1 + 6i - 9 = -8 + 6i$ *OK !*

6. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$f_2(z) = f \circ f(z) = f\left(f(z)\right) = f\left(az + 3 - i\right) = a\left(az + 3 - i\right) + 3 - i = a^2 z + (3-i)(a+1)\,.$$

En particulier, pour $z = 2 + i$,

$$z_2 = f_2(2+i) = a^2(2+i) + (3-i)(a+1)\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad f_2(z) = a^2 z + (3-i)(a+1) \qquad \text{et} \qquad z_2 = a^2(2+i) + (3-i)(a+1)\,.}$$

7. Soit $a \in \mathbb{C}$. A l'aide de la question précédente, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z_2 = 2+i \quad &\Leftrightarrow \quad a^2(2+i)+(3-i)(a+1) = 2+i \\ &\Leftrightarrow \quad (2+i)a^2+(3-i)a+3-i-2-i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (2+i)a^2+(3-i)a+1-2i = 0. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé. On a

$$\begin{aligned} \Delta &= (3-i)^2 - 4(2+i)(1-2i) \\ &= 9-6i-1-4(2-4i+i+2) \\ &= 8-6i-4(4-3i) \\ &= 8-6i-16+12i \\ &= -8+6i. \end{aligned}$$

On reconnait le complexe U de la question 5. Ainsi, $\delta = 1+3i$ est une racine carrée de Δ. Donc

$$\begin{aligned} z_2 = 2+i \quad &\Leftrightarrow \quad a = \frac{-3+i+1+3i}{2(2+i)} \text{ OU } a = \frac{-3+i-1-3i}{2(2+i)} \\ &\Leftrightarrow \quad a = \frac{-2+4i}{2(2+i)} \text{ OU } a = \frac{-4-2i}{2(2+i)} \\ &\Leftrightarrow \quad a = \frac{-1+2i}{2+i} \text{ OU } a = \frac{-2-i}{2+i} \\ &\Leftrightarrow \quad a = \frac{(-1+2i)(2-i)}{5} \text{ OU } a = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad a = \frac{-2+i+4i+2}{5} = i \text{ OU } a = -1. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{-1; i\}.}$$

Vérification, si $a=-1$, on a $z_2 = a^2(2+i)+(3-i)(a+1) = 2+i+0 = 2+i$ OK !
Si $a=i$, on a $z_2 = a^2(2+i)+(3-i)(a+1) = -(2+i)+(3-i)(1+i) = -2-i+3+3i-i+1 = 2+i$ OK !

Partie 3 : A l'ordre n

On note $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ la fonction identité sur $\mathbb{C}$: $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z \end{array}$.

8. Soit $z \in \mathbb{C}$. Procédons par récurrence. Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathscr{P}(n) : \qquad \text{« } f_n(z) = a^n z + (3-i)\sum_{k=0}^{n-1} a^k. \text{ »}$$

Initialisation. Si $n=1$, alors,

$$f_1(z) = f(z) = az+3-i.$$

D'autre part,

$$a^n z + (3-i)\sum_{k=0}^{n-1} a^k = az + (3-i)\sum_{k=0}^{0} a^k = az + (3-i)a^0 = az+3-i.$$

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors,

$$f_n(z) = a^n z + (3-i)\sum_{k=0}^{n-1} a^k.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(z) = f \circ f_n(z) &= f\left(a^n z + (3-i)\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right) \\ &= a\left(a^n z + (3-i)\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right) + 3 - i \\ &= a^{n+1} z + (3-i)\sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} + 3 - i. \end{aligned}$$

Posons $\tilde{k} = k+1$. Si $k = 0$, $\tilde{k} = 1$ et si $k = n-1$, $\tilde{k} = n$. D'où,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(z) &= a^{n+1} z + (3-i)\sum_{\tilde{k}=1}^{n} a^k + 3 - i \\ &= a^{n+1} z + (3-i)\left(\sum_{k=1}^{n} a^k + 1\right) && \text{car la variable est muette} \\ &= a^{n+1} z + (3-i)\sum_{k=0}^{n} a^k. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f_n(z) = a^n z + (3-i)\sum_{k=0}^{n-1} a^k.}$$

On fixe pour la suite $n \in \mathbb{N}^*$.

9. Soit $a \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z_n - f_n(0) = 3 - i \quad &\Leftrightarrow \quad f_n(2+i) - f_n(0) = 3 - i \\ &\Leftrightarrow \quad a^n(2+i) + (3-i)\sum_{k=0}^{n-1} a^k - a^n \times 0 - (3-i)\sum_{k=0}^{n-1} a^k = 3 - i \\ & \qquad\qquad \text{par la question précédente} \\ &\Leftrightarrow \quad a^n(2+i) = 3 - i \\ &\Leftrightarrow \quad a^n = \frac{3-i}{2+i} = \frac{(3-i)(2-i)}{5} = \frac{6-3i-2i-1}{5} = 1 - i \\ &\Leftrightarrow \quad a^n = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \qquad a = \sqrt[n]{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i\left(-\frac{\pi}{4n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = \sqrt[2n]{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{(8k-1)\pi}{4n}}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \sqrt[2n]{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{(8k-1)\pi}{4n}} \;\middle|\; k \in [\![0; n-1]\!] \right\}.}$$

10. Soit $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \in \mathbb{C}^4$. Procédons par double implication. Supposons que

$$\left(\forall z \in \mathbb{C}, \quad \alpha z + \beta = \alpha' z + \beta'\right).$$

En particulier, pour $z = 0$, on a $\beta = \beta'$. Donc on obtient que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \alpha z + \beta = \alpha' z + \beta' \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \alpha z + \beta = \alpha' z + \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \alpha z = \alpha' z.$$

En particulier, pour $z = 1$, on a $\alpha = \alpha'$. Ainsi,

$$\left(\forall z \in \mathbb{C}, \quad \alpha z + \beta = \alpha' z + \beta'\right) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta'. \end{cases}$$

Réciproquement, si $\begin{cases} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \end{cases}$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\alpha z + \beta = \alpha' z + \beta'$. Donc on a aussi

$$\begin{cases} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\forall z \in \mathbb{C}, \quad \alpha z + \beta = \alpha' z + \beta'\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\left(\forall z \in \mathbb{C}, \quad \alpha z + \beta = \alpha' z + \beta'\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta'. \end{cases}}$$

11. Si $a \in \mathbb{U}_n$, alors on sait que $a^n = 1$. Donc par la question 8.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f_n(z) = a^n z + (3 - i) \sum_{k=0}^{n-1} a^k = z + (3 - i) \sum_{k=0}^{n-1} a^k.$$

Or on reconnait une somme géométrique de raison a. Premier cas, $a = 1$. Alors,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f_n(z) = z + (3 - i) \sum_{k=0}^{n-1} 1 = z + n\,(3 - i).$$

Deuxième cas, $a \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$. Alors,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f_n(z) = z + (3 - i)\,\frac{a^n - 1}{a - 1} = z \qquad \text{car } a^n = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f_n(z) = \begin{cases} z + n\,(3 - i) & \text{si } a = 1 \\ z & \text{si } a \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}. \end{cases}}$$

12. Par la question précédente, on a établi que

$$a \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\} \qquad \Rightarrow \qquad f_n = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}.$$

Réciproquement, supposons que $f_n = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. Alors,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f_n(z) = z \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \qquad a^n z + (3 - i) \sum_{k=0}^{n-1} a^k = z.$$

Posons $\alpha = a^n$, $\beta = (3-i)\sum_{k=0}^{n-1} a^k$, $\alpha' = 1$ et $\beta' = 0$. Par la question 10. on obtient que

$$\begin{cases} a^n = 1 \\ (3-i)\sum_{k=0}^{n-1} a^k = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a \in \mathbb{U}_n \\ \sum_{k=0}^{n-1} a^k = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a \in \mathbb{U}_n \\ a \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad a \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}.$$

car les racines de $1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$ sont les racines n-ième de l'unité différentes de 1. Ainsi,

$$f_n = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \quad \Rightarrow \quad a \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}.$$

Conclusion,

$$\boxed{a \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\} \quad \Leftrightarrow \quad f_n = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}.}$$

13. On suppose que $a \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$.

(a) Par la question précédente, $f_n = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. Donc

$$\boxed{z_n = f_n(2+i) = 2+i.}$$

(b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n : $m = qn + r$. On observe que

$$\begin{aligned} z_m = f_m(2+i) &= \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{m=qn+r \text{ fois}}(2+i) \\ &= \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{r \text{ fois}} \circ \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{qn \text{ fois}}(2+i) \\ &= f_r \circ \underbrace{\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} \circ \cdots \circ \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}}_{q \text{ fois}}(2+i) \\ &= f_r \circ \underbrace{f_n \circ \cdots \circ f_n}_{q \text{ fois}}(2+i) \\ &= f_r \circ \underbrace{\mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \circ \cdots \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}}_{q \text{ fois}}(2+i) \end{aligned}$$

Or pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}(z) = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}(z)) = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}(z) = z$. Donc $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. Par récurrence,

$$z_m = f_r \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}(2+i) = f_r(2+i) = z_r.$$

Conclusion,

$$\boxed{z_m = z_r.}$$

La suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est alors cyclique et décrit $(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, 2+i, z_1, \ldots, z_{n-1}, 2+i, \ldots)$.

Problème II - Intégration

On fixe dans tout ce problème $I =]0;+\infty[$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in I, \qquad F_n(x) = \int_1^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Partie 1 : Quelques calculs de F_k

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in I$, $1+t^2 > 1 > 0$ et $t > 0$ donc la fonction $f : t \mapsto \frac{t^{n-1}}{1+t^2}$ est continue sur I (y compris si $n = 0$ et donc $t^{n-1} = \frac{1}{t}$!). De plus $1 \in I$. Donc

$$\boxed{\text{par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction } F_n \text{ est bien définie sur } I}$$

et est même une fonction $\mathscr{C}^1$ sur I en tant qu'unique primitive de f s'annulant en 1.

2. Soit $x \in I$. On a

$$F_1(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On reconnaît la dérivée de la fonction arctan :

$$F_1(x) = [\arctan(t)]_{t=1}^{t=x} = \arctan(x) - \arctan(1).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in I, \qquad F_1(x) = \arctan(x) - \frac{\pi}{4}.}$$

3. Soit $x \in I$. On a

$$F_2(x) = \int_1^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On reconnaît du $\frac{u'}{2u}$:

$$F_2(x) = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\left|1+t^2\right|\right)\right]_{t=1}^{t=x} = \frac{\ln\left(1+x^2\right) - \ln(2)}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in I, \qquad F_2(x) = \frac{\ln\left(1+x^2\right) - \ln(2)}{2}.}$$

Vérification : $F'(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}$ *OK !*

4. Soit $x \in I$. On a

$$F_3(x) = \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On extrait la partie entière :

$$\begin{aligned} F_3(x) &= \int_1^x \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^x 1 - \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= x - 1 - [\arctan(t)]_{t=1}^{t=x} \\ &= x - 1 - \arctan(x) + \arctan(1). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in I, \qquad F_3(x) = x - \arctan(x) + \frac{\pi}{4} - 1.}$$

Vérification : $F_3'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$ *OK !*

5. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t\left(1+t^2\right)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{t\left(1+t^2\right)} = \frac{a\left(1+t^2\right)+(bt+c)\,t}{t\left(1+t^2\right)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{t\left(1+t^2\right)} = \frac{at^2+a+bt^2+ct}{t\left(1+t^2\right)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{t\left(1+t^2\right)} = \frac{(a+b)\,t^2+ct+a}{t\left(1+t^2\right)}.
\end{aligned}$$

On note alors qu'il **suffit** de prendre

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b=-a=-1 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases}.$$

Conclusion, pour $a=1$, $b=-1$ et $c=0$, on a

$$\boxed{\forall t \in I, \quad \frac{1}{t\left(1+t^2\right)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}.}$$

Vérification : $\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} = \frac{1+t^2-t^2}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t(1+t^2)}$ *OK !*

6. Soit $x \in I$. Pour $n=0$, on a

$$F_0(x) = \int_1^x \frac{t^{-1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{t\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t.$$

Donc d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
F_0(x) &= \int_1^x \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\ln\left(|t|\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\left|1+t^2\right|\right)\right]_{t=1}^{t=x} \\
&= \ln(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - 0 + \frac{1}{2}\ln(2) \qquad \text{car } x>0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in I, \qquad F_0(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\ln(2).}$$

Vérification : $F_0'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$ *OK !*

7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$. On a

$$\begin{aligned}
F_n(x) + F_{n+2}(x) &= \int_1^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{t^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^x \frac{t^{n-1}+t^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_1^x t^{n-1}\frac{1+t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Premier cas, si $n \neq 0$, alors,

$$F_n(x) + F_{n+2}(x) = \left[\frac{t^n}{n}\right]_{t=1}^{t=x} = \frac{x^n}{n} - \frac{1}{n}.$$

Second cas, si $n = 0$, alors

$$F_0(x) + F_2(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_{t=1}^{t=x} = \ln(x).$$

On remarque que cela est cohérent avec les questions 3. et 6. car nous avions

$$F_0(x) + F_2(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{\ln\left(1+x^2\right) - \ln(2)}{2} = \ln(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_n(x) + F_{n+2}(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{n} & \text{si } n \neq 0 \\ \ln(x) & \text{si } n = 0. \end{cases}}$$

En particulier, pour $n = 2$,

$$\forall x \in I, \qquad F_2(x) + F_4(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad F_4(x) = \frac{x^2}{2} - 1 - F_2(x).$$

Donc par la question 3.,

$$\boxed{\forall x \in I, \qquad F_4(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\ln\left(1+x^2\right) - \ln(2)}{2} = \frac{x^2 - \ln\left(1+x^2\right) + \ln(2) - 1}{2}.}$$

Partie 2 : Applications

On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_3(x) = x - \arctan(x) + \frac{\pi}{4} - 1.$$

8. On note que la fonction $t \mapsto t\arctan(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\left[1;\sqrt{3}\right]$ et donc $\boxed{A \text{ existe}}$. Posons

$$\forall t \in \left[1;\sqrt{3}\right], \qquad \begin{cases} u(t) = \frac{t^2}{2} \\ v(t) = \arctan(t). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\left[1;\sqrt{3}\right]$ et

$$\forall t \in \left[1;\sqrt{3}\right], \qquad \begin{cases} u'(t) = t \\ v(t) = \frac{1}{1+t^2}. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{\sqrt{3}} t\arctan(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\arctan(t)\right]_{t=1}^{t=\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{2}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{2}\arctan\left(\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2}\arctan(1) - \frac{1}{2}F_3\left(\sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

Donc par la question 4.,

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{2} \times \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \arctan\left(\sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{4} - 1\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5\pi}{12} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{A = \frac{5\pi}{12} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}.}$$

9. On note que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1+\mathrm{e}^{2t} \geqslant 1 > 0$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{3t}}{1+\mathrm{e}^{2t}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc notamment sur $[0;1]$, donc $\boxed{B \text{ existe}}$. Posons pour tout $t \in [0;1]$, $s = \mathrm{e}^t \Leftrightarrow t = \ln(s)$. Si $t = 0$, $s = 1$. Si $t = 1$, $s = \mathrm{e}$. Enfin, la fonction ln est $\mathscr{C}^1$ sur $[1;\mathrm{e}]$ et $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{s}$. Ainsi,

$$B = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{3t}}{1+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{s^3}{1+s^2}\frac{\mathrm{d}s}{s} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{s^2}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = F_3(\mathrm{e}).$$

Conclusion, par la question 4.,

$$\boxed{B = \mathrm{e} - \arctan(\mathrm{e}) + \frac{\pi}{4} - 1.}$$

10. Pour tout $t \in [0;1]$, $1+t \geqslant 1 > 0$ donc $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{1+t}$ est continue sur $[0;1]$ donc

$$\boxed{C \text{ existe.}}$$

Posons $s = \sqrt{t}$. Si $t = 0$, $s = 0$ et si $t = 3$, $s = \sqrt{3}$. De plus $t = s^2$. La fonction $s \mapsto s^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0;\sqrt{3}\right]$ et $\mathrm{d}t = 2s\,\mathrm{d}s$. Donc par changement de variable,

$$\begin{aligned} C &= \int_0^3 \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{s}{1+s^2} 2s\,\mathrm{d}s \\ &= 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{s^2}{1+s^2}\,\mathrm{d}s \\ &= 2\left(F\left(\sqrt{3}\right) - F(0)\right). \end{aligned}$$

Toujours par la question 4.

$$C = 2\left(\sqrt{3} - \arctan\left(\sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{4} - 1 - 0 + 0 - \frac{\pi}{4} + 1\right) = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{C = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}.}$$

Problème III - Equations différentielles d'ordre 1

On considère les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{lrl}
(E^+) & \forall x \in \,]0;+\infty[\,, & xy'(x) + (1-x)\,y(x) = x \\
(F) & \forall x \in \,]0;+\infty[\,, & xy'(x) + (1-x)\,y(x) = x + \cos(x) \\
(E^-) & \forall x \in \,]-\infty;0[\,, & xy'(x) + (1-x)\,y(x) = x \\
(E) & \forall x \in \mathbb{R}, & xy'(x) + (1-x)\,y(x) = x.
\end{array}$$

1. La fonction $\lambda_1 : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\text{admet des primitives sur } \mathbb{R}.}$ De plus, par le théorème fondamental de l'analyse, l'une d'elles est donnée par

$$F : \quad x \mapsto \int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u(t) = -\,\mathrm{e}^{-t} \\ v(t) = t. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^{-t} \\ v'(t) = 1. \end{cases}$$

Ainsi, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
F(x) = \int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \left[-t\,\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x -\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= -x\,\mathrm{e}^{-x} + 0 + \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= -x\,\mathrm{e}^{-x} + \left[-\,\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=0}^{t=x} \\
&= -x\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + 1.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de λ_1 est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\,(x+1)\,\mathrm{e}^{-x} + K \end{array} \;\middle|\; K \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Vérification : $F'(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} = x\,\mathrm{e}^{-x}$ *OK !*

2. La fonction $\lambda_2 : x \mapsto \cos(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\text{admet des primitives sur } \mathbb{R}.}$ De plus, par le théorème fondamental de l'analyse, l'une d'elles est donnée par

$$F : \quad x \mapsto \int_0^x \cos(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On observe que

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \cos(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{Re}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{(-1+i)t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(-1+i)t}}{-1+i}\right]_{t=0}^{t=x}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{(-1+i)x}}{-1+i} - \frac{1}{-1+i}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{-x}\,\frac{(\cos(x)+i\sin(x))\,(-1-i)}{1+1} - \frac{-1-i}{1+1}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\left(-\cos(x)+\sin(x)\right) + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de λ_2 est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\left(\sin(x)-\cos(x)\right)+K \end{array} \;\middle|\; K \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Vérification : on a

$$\begin{aligned}
F'(x) &= -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\left(\sin(x)-\cos(x)\right) + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\left(\cos(x)+\sin(x)\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\left(-\sin(x)+\cos(x)+\cos(x)+\sin(x)\right) \\
&= \mathrm{e}^{-x}\cos(x).
\end{aligned}$$

OK !

3. Puisque $x \neq 0$, on a directement :

$$\boxed{\left(E_0^+\right) \qquad \forall x \in \left]0;+\infty\right[, \quad y'(x) + \frac{1-x}{x}y(x) = 0.}$$

La fonction $a : x \mapsto \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$ est continue sur $]0;+\infty[$ donc admet des primitives sur $]0;+\infty[$, dont l'une est donnée par

$$A : x \mapsto \ln\left(|x|\right) - x = \ln(x) - x.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $\left(E_0^+\right)$ est donné par

$$\mathcal{S}_0^+ = \left\{ \begin{array}{ccc} \left]0;+\infty\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & K\,\mathrm{e}^{-\ln(x)+x} \end{array} \;\middle|\; K \in \mathbb{R} \right\}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{S}_0^+ = \left\{ \begin{array}{ccc} \left]0;+\infty\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & K\frac{\mathrm{e}^x}{x} \end{array} \;\middle|\; K \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \left]0;+\infty\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\mathrm{e}^x}{x} \end{array} \right).}$$

Vérification :

$$\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)' + \frac{x-1}{x}\frac{\mathrm{e}^x}{x} = \frac{\mathrm{e}^x\,x - \mathrm{e}^x}{x^2} + \frac{x-1}{x^2}\,\mathrm{e}^x = 0 \ \ OK\,!$$

4. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $x \neq 0$, donc

$$(E^+) \ : \qquad \forall x \in]0;+\infty[\,, \quad y'(x) + \frac{1-x}{x}y(x) = 1.$$

Posons $y_0 : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x}$. La fonction y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et par la question précédente, $y_0 \in \mathscr{S}_0^+$. Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons sur $\mathbb{R}_+^*$, $\lambda : x \mapsto \frac{y(x)}{y_0(x)}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y_0(x) \neq 0$. La fonction λ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont. On obtient alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E^+) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda'(x)y_0(x) + \underbrace{\lambda(x)y_0'(x) + \frac{1-x}{x}y_0(x)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_0^+} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda'(x) = \frac{1}{y_0(x)} = x\,\mathrm{e}^{-x}\,. \end{aligned}$$

Par la question 1.

$$\begin{aligned} & y \text{ solution de } (E^+) \\ \Leftrightarrow \quad & \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \lambda(x) = -\,(x+1)\,\mathrm{e}^{-x} + K \\ \Leftrightarrow \quad & \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y(x) = \lambda(x)y_0(x) = \left(-\,(x+1)\,\mathrm{e}^{-x} + K\right)\frac{\mathrm{e}^x}{x} = -\frac{x+1}{x} + K\frac{\mathrm{e}^x}{x}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{S}^+ = \left\{ \begin{array}{rcl}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -1 - \frac{1}{x} + K\frac{\mathrm{e}^x}{x} \end{array} \ \middle|\ K \in \mathbb{R} \right\}.}$$

On a déjà vérifié les solutions homogènes. Vérifions la solution particulière :

$$x\left(-1 - \frac{1}{x}\right)' + (1-x)\left(-1 - \frac{1}{x}\right) = x\frac{1}{x^2} - \frac{(1-x)\,(x+1)}{x} = \frac{1-\left(1-x^2\right)}{x} = x \ \ OK\,!$$

5. Soit y une fonction dérivable. Par la question précédente, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (\mathscr{P}) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = -1 - \frac{1}{x} + K\frac{\mathrm{e}^x}{x} \\ y(1) = -1 - 1 + K\,\mathrm{e} = -2 + K\,\mathrm{e} = 0 \ \Leftrightarrow\ K = 2\,\mathrm{e}^{-1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = -1 - \frac{1}{x} + 2\,\mathrm{e}^{-1}\,\frac{\mathrm{e}^x}{x}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathscr{P})$ est

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathscr{P}} = \left\{ \begin{array}{rcl}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -1 - \frac{1}{x} + 2\frac{\mathrm{e}^{x-1}}{x} \end{array} \right\}.}$$

6. Posons

$$\begin{aligned} (F_1) \qquad & \forall x \in]0;+\infty[\,, \quad xy'(x) + (1-x)\,y(x) = \cos(x) \\ \Leftrightarrow \qquad & \forall x \in]0;+\infty[\,, \quad y'(x) + \frac{1-x}{x}y(x) = \frac{\cos(x)}{x} \end{aligned}$$

On note que l'équation homogène associée à (F_1) est $\left(E_0^+\right)$. Donc $y_0 : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x}$ est une solution de l'équation homogène associée. Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons sur $\mathbb{R}_+^*$, $\lambda : x \mapsto \frac{y(x)}{y_0(x)}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y_0(x) \neq 0$. La fonction λ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont. On obtient alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (F_1) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda'(x)y_0(x) + \underbrace{\lambda(x)y_0'(x) + \frac{1-x}{x}y_0(x)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_0^+} = \frac{\cos(x)}{x} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda'(x) = \frac{\cos(x)}{xy_0(x)} = \cos(x)\,\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Par la question 2.

$$\begin{aligned} & y \text{ solution de } (F_1) \\ \Leftrightarrow \quad & \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda(x) &&= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\left(\sin(x) - \cos(x)\right) + K \\ \Leftrightarrow \quad & \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) &&= \lambda(x)y_0(x) \\ & &&= \left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\left(\sin(x) - \cos(x)\right) + K\right)\frac{\mathrm{e}^x}{x} \\ & &&= \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2x} + K\frac{\mathrm{e}^x}{x}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{S}_{F_1} = \left\{ \begin{array}{rcl}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin(x)-\cos(x)}{2x} + K\frac{\mathrm{e}^x}{x} \end{array} \middle| \ K \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Vérification,

$$\begin{aligned} & x\left(\frac{\sin(x) - \cos(x)}{2x}\right)' + (1-x)\left(\frac{\sin(x) - \cos(x)}{2x}\right) \\ &= x\frac{(\cos(x) + \sin(x))\,x - \sin(x) + \cos(x)}{2x^2} + \frac{(1-x)\,(\sin(x) - \cos(x))}{x} \\ &= \frac{(\cos(x) + \sin(x))\,x - \sin(x) + \cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - x\,(\sin(x) - \cos(x))}{2x} \\ &= \frac{2\cos(x)x}{2x} \\ &= \cos(x) \ \ OK\,! \end{aligned}$$

7. On a

$$\begin{aligned} (E^-) \quad & \forall x \in]-\infty;0[, \quad xy'(x) + (1-x)\,y(x) = x \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-\infty;0[, \quad y'(x) + \frac{1-x}{x}y(x) = 1. \end{aligned}$$

En s'inspirant de la question 4. posons $y_p : \begin{array}{rcl}]-\infty;0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -1 - \frac{1}{x} = -\frac{1+x}{x} \end{array}$. La fonction y_p est déri-

vable sur $\mathbb{R}_-^*$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad y_p'(x) + \frac{1-x}{x} y_p(x) &= \frac{1}{x^2} + \frac{1-x}{x}\left(-\frac{1+x}{x}\right) \\ &= \frac{1-(1-x)(1+x)}{x^2} \\ &= \frac{1-\left(1-x^2\right)}{x^2} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{y_p : \begin{array}{rcl}]-\infty;0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -1-\frac{1}{x} = -\frac{1+x}{x} \end{array} \quad \text{est UNE solution de } \left(E^-\right).}$$

8. L'équation homogène associée à (E^-) est donnée par

$$\left(E_0^-\right) \qquad \forall x \in]-\infty;0[, \quad y'(x) + \frac{1-x}{x} y(x) = 0.$$

La fonction $a : x \mapsto \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$ est continue sur l'intervalle $]-\infty;0[$ donc admet des primitives sur cet intervalle dont l'une est donnée par

$$A : x \mapsto \ln(|x|) - x = \ln(-x) - x.$$

Ainsi,

$$\mathcal{S}_0^- = \left\{ \begin{array}{rcl}]-\infty;0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & K\,\mathrm{e}^{-\ln(-x)+x} \end{array} \middle| K \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{array}{rcl}]-\infty;0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{K}{x}\,\mathrm{e}^{x} \end{array} \middle| K \in \mathbb{R} \right\}.$$

Quitte à changer K en $-K$, on obtient :

$$\mathcal{S}_0^- = \left\{ \begin{array}{rcl}]-\infty;0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & K\frac{\mathrm{e}^x}{x} \end{array} \middle| K \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{rcl}]-\infty;0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\mathrm{e}^x}{x} \end{array} \right).$$

Conclusion, par la question précédente,

$$\boxed{\mathcal{S}^- = y_p + \mathcal{S}_0^- = \left\{ \begin{array}{rcl}]-\infty;0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -1-\frac{1}{x} + K\frac{\mathrm{e}^x}{x} \end{array} \middle| K \in \mathbb{R} \right\}.}$$

9. L'expression $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0. Cette dernière étant dérivable en 0, on obtient,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \exp'(0) = \mathrm{e}^0 = 1.}$$

Puis, si $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{K\,\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\mathrm{e}^x - 1 + (K-1)\,\mathrm{e}^x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} + (K-1)\,\frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

Or $di \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$. Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (K-1)\,\frac{\mathrm{e}^x}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } K>1 \\ 0 & \text{si } K=1 \\ -\infty & \text{si } K<1. \end{cases}$$

Par somme,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{K\,\mathrm{e}^x - 1}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } K>1 \\ 1 & \text{si } K=1 \\ -\infty & \text{si } K<1. \end{cases}}$$

10. On est en présence d'un problème de raccord en 0. Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \in \mathcal{S}^+ \\ y \in \mathcal{S}^- \\ 0 + y(0) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists K_1 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = -1 - \frac{1}{x} + K_1 \frac{\mathrm{e}^x}{x} \\ \exists K_2 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad y(x) = -1 - \frac{1}{x} + K_2 \frac{\mathrm{e}^x}{x} \\ y(0) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Or par la question précédente, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y(x)$ existe si et seulement si $K_1 = 1$. La fonction y étant continue en 0 il faut que cette limite existe et vaille $y(0) = 0$. Donc $K_1 = 1$ et donc

$$\forall x > 0, \qquad y(x) = -1 + \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}.$$

Dans ce cas, toujours par la question précédente,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y(x) = -1 + 1 = 0 = y(0),$$

donc y est bien continue à droite en 0. De la même façon à gauche, on a $K_2 = 1$ et $\forall x < 0$, $y(x) = -1 + \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = -1 + \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}.$$

Nous avons vu que la fonction est continue en 0 mais aussi sur $\mathbb{R}^*$ donc y est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme et quotient de fonctions qui le sont. De plus, par l'énoncé, on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{-1 - \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} - 0}{x - 0} = \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{y(x) - 0}{x - 0} = \frac{1}{2}.$$

Donc la fonction y est dérivable en 0 (et $y'(0) = 1/2$). Conclusion, l'équation (E) admet une unique solution

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -1 - \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \end{array} \right\}.}$$

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(G) \qquad \forall x \in \,]0; +\infty[\,, \quad x\,\mathrm{sh}(x) z'(x) + [(1-x)\,\mathrm{sh}(x) + x\,\mathrm{ch}(x)]\, z(x) = x.$$

11. Soit z une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$. On pose pour tout $x \in]0;+\infty[$, $y(x) = z(x)\operatorname{sh}(x)$. La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc par produit,

$$\boxed{y \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{sh}(x) > 0$ donc $\operatorname{sh}(x) \neq 0$. Donc z est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas,

Puis,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} z(x) = \frac{y(x)}{\operatorname{sh}(x)} \\ z'(x) = \frac{y'(x)\operatorname{sh}(x) - y(x)\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(x)}. \end{cases}$$

Dès lors, on obtient les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& z \text{ solution de } (G) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in]0;+\infty[, \quad x\operatorname{sh}(x)z'(x) + [(1-x)\operatorname{sh}(x) + x\operatorname{ch}(x)]\, z(x) = x \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in]0;+\infty[, \quad x\operatorname{sh}(x)\frac{y'(x)\operatorname{sh}(x) - y(x)\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(x)} + [(1-x)\operatorname{sh}(x) + x\operatorname{ch}(x)]\,\frac{y(x)}{\operatorname{sh}(x)} = x \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in]0;+\infty[, \quad \frac{x\operatorname{sh}(x)y'(x) - x\operatorname{ch}(x)y(x)}{\operatorname{sh}(x)} + \frac{(1-x)\operatorname{sh}(x)y(x) + x\operatorname{ch}(x)y(x)}{\operatorname{sh}(x)} = x \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in]0;+\infty[, \quad \frac{x\operatorname{sh}(x)y'(x) + (1-x)\operatorname{sh}(x)y(x)}{\operatorname{sh}(x)} = x \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in]0;+\infty[, \quad xy'(x) + (1-x)\,y(x) = x \\
\Leftrightarrow \quad & y \text{ solution de } \left(E^+\right)
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{z \text{ solution de } (G) \quad \Leftrightarrow \quad y \text{ solution de } (E_+).}$$

12. Soit z une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par la question précédente et la question 4.

$$\begin{aligned}
z \in \mathcal{S}_G \quad & \Leftrightarrow \quad y \in \mathcal{S}^+ \\
& \Leftrightarrow \quad \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = -1 - \frac{1}{x} + K\frac{\mathrm{e}^x}{x} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z(x) = \frac{y(x)}{\operatorname{sh}(x)} = \frac{K\,\mathrm{e}^x - x - 1}{x\operatorname{sh}(x)}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{S}_G = \left\{ \begin{array}{rcl}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{K\,\mathrm{e}^x - x - 1}{x\operatorname{sh}(x)} \end{array} \;\middle|\; K \in \mathbb{R} \right\}.}$$