Epreuve de mathématiques 4
2023-2024

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

lycée Raoul Follereau

Problème 1 - Equations différentielles

Soient $I = \mathbb{R}_+^*$,

$$f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2\,\mathrm{e}^x}{x^3} \end{array} \qquad \text{et} \qquad F : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

On considère alors les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{rll} (E) : & \forall x \in I, & y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3} \\ (E_1) : & \forall x \in I, & y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^x \\ (E_2) : & \forall x \in I, & y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3} \\ (G) : & \forall x \in I, & z''(x) - 2z'(x) + z(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^4}(x-3)\,. \end{array}$$

1. Justifier que F est dérivable sur I et préciser sa dérivée.
2. Préciser (E_0) l'équation différentielle homogène associée à (E), (E_1), (E_2) et (G) et la résoudre.
3. Résoudre (E_1).
4. Montrer que si y est une solution de (E_2) alors y'' est dérivable puis en déduire que y est trois dérivable.
5. Montrer que si y est solution de (E_2) alors y' est solution de (G).
6. Déterminer l'ensemble des réels $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que $d : x \mapsto \frac{\lambda\,\mathrm{e}^x}{x}$ soit une solution de (E_2).
7. En déduire les solutions de (E_2).
8. En déduire les solutions de (E).
9. Déterminer les solutions de (G).

Exercice 2 - Calculs

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$,
$$(I) : \quad \frac{2x+5}{x-2} - \frac{3x-6}{x+4} < 2.$$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$,
$$(J) : \quad |3-x| + 2x + 3 < \left|x^2 - x - 2\right| + 2.$$
3. Soient $h : x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)} - \sqrt{1+2x}$ et $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{\sin(x)} - \sqrt{1+2x}}{1-\cos(x)}$. Calculer le développement à l'ordre 3 en 0 de h et en déduire le développement à l'ordre 1 de f.
4. Soit $g : x \mapsto \sqrt{x^2+x^4}\tan\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(4 + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$. Déterminer si g admet une asymptote en $+\infty$ et si c'est le cas, déterminer la position relative de la courbe de g par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

Problème 3 - Matrices

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $J \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$M(a) = I_p + aJ.$$

Partie 1 : Un exemple et une méthode

On suppose dans cette partie que $p = 3$ et $J = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Calculer J^2.
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, J^n.
3. Préciser $M(a)$ et $\mathrm{Tr}\,(M(a))$.
4. Pour quelle valeur de a, la matrice $M(a)$ est-elle symétrique ?
5. Déterminer $D \in \mathscr{D}_3(\mathbb{R})$ une matrice diagonale telle que $M(a)P = PD$ *(sans calculer P^{-1})*.
6. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
7. En déduire $M(a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Préciser $M(-1)^3$.

Partie 2 : Cas général par une autre méthode

On reprend $p \in \mathbb{N}^*$ et on fixe pour tout le reste du problème $J \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $J^2 = -J$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

8. Rappeler la formule du binôme de Newton pour les matrices.
9. Calculer $M(a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
10. Vérifier votre résultat lorsque $p = 3$, $J = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $n = 3$ et $a = -1$.

Partie 3 : Inversibilité

On suppose toujours que $J^2 = -J$. On suppose de plus que $J \neq 0_p$.

11. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $M(a)M(b) = M(c)$.
12. Préciser $M(0)$.
13. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $M(a)$ est inversible et démontrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ que l'on précisera tel que $M(a)^{-1} = M(b)$.
14. Calculer $M(1)^2$. En déduire que $M(1)$ n'est pas inversible.

Partie 4 : Troisième méthode

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1-a)\,u_n + a$. On pourra s'appuyer sur la partie 3 mais pas sur la partie 2

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(a)^n = M(u_n)$.
16. Déterminer $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $\omega = (1-a)\,\omega + a$. On fixe dans la suite cette valeur de ω.
17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \omega$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
18. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n.
19. Calculer à nouveau $M(a)^n$ résultat lorsque $p = 3$, $J = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $n = 3$ et $a = -1$.

Problème 4 - Analyse asymptotique

Partie 1 : Construction de f

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose

$$f_0(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le développement limité à l'ordre n de f_0 en 0^+.
2. Préciser le cas $n = 3$.
3. En déduire que f_0 est prolongeable par continuité en 0. On note alors f ce prolongement. Préciser $f(0)$.
4. Sans aucun calcul, peut-on affirmer en 0 que la fonction f est dérivable ? $\mathscr{C}^1$? $\mathscr{C}^n$?
5. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que l'on précisera tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{2\,\mathrm{sh}\,(ax)\,\mathrm{e}^{bx}}{x}.$$

6. Retrouver alors le résultat de la question 2.

Partie 2 : Construction de φ

On donne

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

On admet que f est continue sur $\mathbb{R}$ et on donne

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o\left(x^3\right).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On définit également pour tout $x \in \,]0; +\infty[$,

$$\varphi_0(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

7. Justifier avec soin que φ_0 est bien définie sur $]0; +\infty[$.
8. A l'aide d'un théorème du cours que l'on précisera, justifier que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser F'.
9. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 de F.
10. Montrer que

$$\forall x \in \,]0; +\infty[\,, \quad \varphi_0(x) = F\,(2x) - F(x) + \ln(2).$$

11. En déduire un développement limité à l'ordre 4 de φ_0 en 0^+.
12. En déduire que φ_0 est prolongeable par continuité en 0. On note φ son prolongement.

Partie 3 : Etude de φ

13. Préciser, si elle existe, l'équation de la tangente au graphe de φ en 0 ainsi que la position du graphe de φ par rapport à sa tangente.
14. Justifier que φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et que
$$\forall x \in]0;+\infty[\,, \qquad \varphi'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}{x}.$$
15. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de φ'.
16. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de φ (et non de φ') en 1 en fonction de $\varphi(1)$ (que l'on ne calculera pas) ainsi que la position du graphe de φ par rapport à sa tangente au voisinage de 1.
17. Justifier que
$$\forall x \in]0;+\infty[\,,\ \forall t \in [x;2x]\,, \qquad \frac{\mathrm{e}^t}{t} \geqslant \frac{\mathrm{e}^x}{2x}.$$
18. En déduire que
$$\forall x \in]0;+\infty[\,,\ \varphi(x) \geqslant \frac{\mathrm{e}^x}{2}.$$
19. En déduire la limite de φ en $+\infty$ et préciser son comportement asymptotique en $+\infty$.
20. Dresser le tableau de variation complet de φ.
21. Justifier que φ définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J que l'on précisera. On note $\psi = \varphi^{-1}$ sa réciproque.
22. Tracer l'allure du graphe de φ. On fera apparaitre la tangente en 0, sa position par rapport à cette tangente et son comportement asymptotique en $+\infty$. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie 4 : Etude de ψ

On admet dans la suite que ψ est $\mathscr{C}^\infty$ sur J.

23. Justifier qu'il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\psi(y) \underset{y\to\ln(2)}{=} a_0 + a_1\left(y - \ln(2)\right) + a_2\left(y - \ln(2)\right)^2 + o\left(\left(y - \ln(2)\right)^2\right).$$
24. En utilisant la relation $x = \psi\left(\phi(x)\right)$ déterminer les valeurs de a_0, a_1 et a_2.
25. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de ψ en $\ln(2)$ et préciser la position de sa courbe par rapport à la tangente au voisinage de $\ln(2)$.