Commentaires du DS4
Ensembles et applications, continuité et dérivabilité, analyse asymptotique

Des résultats qui ne s'améliorent pas voire qui se détériorent faute d'un apprentissage rigoureux. Les méthodes classiques n'ont pas été travaillées ce qui fait que certains ne savent même pas démarrer. Le cours n'est pas bien appris non plus : la formule du binôme de Newton, le théorème fondamental de l'analyse restent vagues. Impossible dans une telle situation de rentabiliser son devoir. Deux ou trois étudiants au contraire continuent de progresser avec des copies d'un bon niveau.
La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{50}\right)^{0,7} \times 20$.

	Soin	P1	P2	P3.1	P3.2	P3.3	P3.4	P3	P4.1	P4.2	P4.3	P4.4	P4	Total	Note finale
Moyenne	-1,2	4,8	1	5,4	1,1	0,6	0	7,2	3	1,7	0,5	0	5,1	15,93	8,51
Sur		18	12	12	5	7	7	31	9	11	18	5	30	91	20

TOTAL : 91 pt

Problème I - Equations différentielles 18 pt

Soient $I = \mathbb{R}_+^*$,

$$f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2\,\mathrm{e}^x}{x^3} \end{array} \qquad \text{et} \qquad F : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

On considère alors les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}
(E) \ : &\quad \forall x \in I, \quad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}^x}{x^3} \\
(E_1) \ : &\quad \forall x \in I, \quad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^x \\
(E_2) \ : &\quad \forall x \in I, \quad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^3} \\
(G) \ : &\quad \forall x \in I, \quad z''(x) - 2z'(x) + z(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^4}(x-3).
\end{aligned}$$

1. **2 pt** Justifier que F est dérivable sur I et préciser sa dérivée.

   Pas bon. Je vous avais alerté que vous ne maitrisiez pas cette définition et vous n'avez, globalement, pas fait l'effort de vous corriger.

2. **2 pt** Préciser (E_0) l'équation différentielle homogène associée à (E), (E_1), (E_2) et (G) et la résoudre.

   Bien, ce cours là est su.

3. **2 pt** Résoudre (E_1).

   Quelques belles réponses.

4. **2 pt** Montrer que si y est une solution de (E_2) alors y'' est dérivable sur I puis en déduire que y est trois dérivable sur I.

   Peu traitée. On remarque tout de suite ceux qui se sont investis dans le DM et qui ont pu refaire la même question.

5. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que si y est solution de (E_2) alors y' est solution de (G).

   De bonnes choses, la rédaction est parfois à perfectionner.

6. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer l'ensemble des réels $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que $d : x \mapsto \frac{\lambda \, \mathrm{e}^x}{x}$ soit une solution de (E_2).

   Bien pour ceux qu'ils l'ont tenté. Pensez à justifier que d est deux fois dérivable avant d'attaquer.

7. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire les solutions de (E_2).

   N'allez pas trop vite dans la rédaction : citez les questions que vous utilisez et faites bien apparaitre que vous avez UNE solution particulière à laquelle vous ajouter l'ensemble des solutions homogènes.

8. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire les solutions de (E).

   Il fallait citer le principe de superposition. Quelques belles réponses.

9. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer les solutions de (G).

   Là aussi une réponse ne peut pas être simplement une conclusion. Justifiez votre réponse en soignant un peu la rédaction.

Exercice II - Calculs $\boxed{12 \text{ pt}}$

1. $\boxed{3 \text{ pt}}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$,

$$(I) \ : \quad \frac{2x+5}{x-2} - \frac{3x-6}{x+4} < 2.$$

   Un joli massacre. Très peu ont pensé à discuter sur le signe de $(x-2)(x+4)$ en multipliant l'inégalité. Beaucoup d'erreurs de calcul qui vous empêche d'aller jusqu'au bout et donc de rentabiliser la question.

2. $\boxed{3 \text{ pt}}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$,

$$(J) \ : \quad |3-x| + 2x + 3 < \left|x^2 - x - 2\right| + 2.$$

   Un peu mieux que la précédente mais certains se sont malgré tout embourbés dedans.

3. $\boxed{3 \text{ pt}}$ Soient $h : x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)} - \sqrt{1+2x}$ et $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{\sin(x)} - \sqrt{1+2x}}{1-\cos(x)}$. Calculer le développement à l'ordre 3 en 0 de h et en déduire le développement à l'ordre 1 de f.

   Décevant car très souvent vous n'avez pas réussi à obtenir ne serait-ce que le DL de h alors que vous êtes capables. Cela dénote un manque d'entrainement.

4. $\boxed{3 \text{ pt}}$ Soit $g : x \mapsto \sqrt{x^2+x^4} \tan\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(4 + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$. Déterminer si g admet une asymptote en $+\infty$ et si c'est le cas, déterminer la position relative de la courbe de g par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

   Peu traitée.

Problème III - Matrices $\boxed{31 \text{ pt}}$

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $J \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$M(a) = I_p + aJ.$$

Partie 1 : Un exemple et une méthode $\boxed{12 \text{ pt}}$

On suppose dans cette partie que $p = 3$ et $J = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. $\boxed{1 \text{ pt}}$ Calculer J^2.

   C'est cadeau.

2. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, J^n.

   Décevant, un petite question dans les classiques de l'interro d'entrainement et vous n'êtes pas si nombreux que cela à la réussir.

3. $\boxed{1 \text{ pt}}$ Préciser $M(a)$ et $\operatorname{Tr}(M(a))$.

   C'est aussi cadeau. Certains ne connaissent pas la définition de la trace.

4. $\boxed{1 \text{ pt}}$ Pour quelle valeur de a, la matrice $M(a)$ est-elle symétrique ?

   Pas difficile mais moins traitée. Beaucoup me parachutent $a = 0$ sans justifier. Mais plusieurs belles réponses aussi.

5. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer $D \in \mathscr{D}_3(\mathbb{R})$ une matrice diagonale telle que $M(a)P = PD$ *(sans calculer P^{-1})*.

   Pas énormément traitée mais plusieurs réussites.

6. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

   Facile ! Bien réussie.

7. $\boxed{3 \text{ pt}}$ En déduire $M(a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Préciser $M(-1)^3$.

   Le calcul de $M(-1)^3$ devait découler de celui de $M(a)^n$.

Partie 2 : Cas général par une autre méthode $\boxed{5 \text{ pt}}$

On reprend $p \in \mathbb{N}^*$ et on fixe pour tout le reste du problème $J \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $J^2 = -J$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

8. $\boxed{1 \text{ pt}}$ Rappeler la formule du binôme de Newton pour les matrices.

   Horreur, malheur, tristesse. Je n'ai rien à ajouté.

9. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Calculer $M(a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Grand classique mais très peu traitée finalement...

10. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Vérifier la cohérence de votre résultat avec la question 7. lorsque $p = 3$, $J = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $n = 3$ et $a = -1$.

    Quelques beaux succès.

Partie 3 : Inversibilité 7 pt

On suppose toujours que $J^2 = -J$. On suppose de plus que $J \neq 0_p$.

11. 2 pt Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $M(a)M(b) = M(c)$.

    Peu traitée mais des belles réponses.

12. 0.5 pt Préciser $M(0)$.

    Facile!!

13. 2.5 pt En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $M(a)$ est inversible et démontrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ que l'on précisera tel que $M(a)^{-1} = M(b)$.

    Moins réussie. Pas si dure, allez voir le corrigé.

14. 2 pt Calculer $M(1)^2$. En déduire que $M(1)$ n'est pas inversible.

    Certains sont restés en dimension 3×3. Lisez bien l'énoncé, il avait été spécifié que p redevenait quelconque.

Partie 4 : Troisième méthode 7 pt

Partie non traitée et pourtant très abordable. N'hésitez pas à la faire chez vous.
Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1 - a)\, u_n + a$.
On pourra s'appuyer sur la partie 3 mais pas sur la partie 2

15. 2 pt Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(a)^n = M(u_n)$.

16. 0.5 pt Déterminer $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $\omega = (1 - a)\,\omega + a$. On fixe dans la suite cette valeur de ω.

17. 1.5 pt Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \omega$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

18. 1 pt En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n.

19. 2 pt Calculer à nouveau $M(a)^n$ résultat lorsque $p = 3$, $J = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $n = 3$ et $a = -1$.

Problème IV - Analyse asymptotique 43 pt

Partie 1 : Construction de f 9 pt

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose

$$f_0(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

1. 2 pt Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le développement limité à l'ordre n de f_0 en 0^+.

   Peu tant réussie que cela mais des bonnes réponses.

2. 1 pt Préciser le cas $n = 3$.

   Certains ne réussissent pas la précédente mais parviennent à faire celle-là.

3. 1.5 pt En déduire que f_0 est prolongeable par continuité en 0. On note alors f ce prolongement. Préciser $f(0)$.

   Raisonnement pas toujours clair alors qu'il ne présente pas de difficulté.

4. $\boxed{\textbf{1.5 pt}}$ Sans aucun calcul, peut-on affirmer en 0 que la fonction f est dérivable ? $\mathscr{C}^1$? $\mathscr{C}^n$?
   HORREUR !!! Il faut absolument être bien au clair sur ces propriétés de cours !

5. $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que l'on précisera tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{2\,\mathrm{sh}\,(ax)\,\mathrm{e}^{bx}}{x}.$$

   Facile, quelques-uns patinent. A reprendre calmement si cela a été le cas.

6. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Retrouver alors le résultat de la question 2.
   Peu traitée finalement. Quelques réussites.

Partie 2 : Construction de φ $\boxed{\textbf{11 pt}}$

On donne

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

On admet que f est continue sur $\mathbb{R}$ et on donne

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o\left(x^3\right).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On définit également pour tout $x \in \left]0; +\infty\right[$,

$$\varphi_0(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

7. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Justifier avec soin que φ_0 est bien définie sur $\left]0; +\infty\right[$.
   Pas clair. On en reparlera en mai mais efforcez-vous au plus vite à comprendre comment elle se rédige.

8. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ A l'aide d'un théorème du cours que l'on précisera, justifier que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser F'.
   Mieux.

9. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer le développement limité à l'ordre 4 de F.
   Plusieurs belles réponses. N'oubliez pas de parler de $F(0)$!

10. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que

$$\forall x \in \left]0; +\infty\right[, \quad \varphi_0(x) = F(2x) - F(x) + \ln(2).$$

   Très peu traitée.

11. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire un développement limité à l'ordre 4 de φ_0 en 0^+.
    Quelques tentatives et quelques succès.

12. $\boxed{\textbf{1 pt}}$ En déduire que φ_0 est prolongeable par continuité en 0. On note φ son prolongement.
    RAS

La suite n'a pas été traitée.

Partie 3 : Etude de φ 18 pt

13. 2 pt Préciser, si elle existe, l'équation de la tangente au graphe de φ en 0 ainsi que la position du graphe de φ par rapport à sa tangente.

14. 2 pt Justifier que φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et que
$$\forall x \in]0;+\infty[\,, \qquad \varphi'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}}{x}.$$

15. 2 pt Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de φ'.

16. 2 pt En déduire l'équation de la tangente à la courbe de φ (et non de φ') en 1 en fonction de $\varphi(1)$ (que l'on ne calculera pas) ainsi que la position du graphe de φ par rapport à sa tangente au voisinage de 1.

17. 1 pt Justifier que
$$\forall x \in]0;+\infty[\,,\ \forall t \in [x;2x]\,, \qquad \frac{\mathrm{e}^{t}}{t} \geqslant \frac{\mathrm{e}^{x}}{2x}.$$

18. 2 pt En déduire que
$$\forall x \in]0;+\infty[\,,\ \varphi(x) \geqslant \frac{\mathrm{e}^{x}}{2}.$$

19. 2 pt En déduire la limite de φ en $+\infty$ et préciser son comportement asymptotique en $+\infty$.

20. 1 pt Dresser le tableau de variation complet de φ.

21. 2 pt Justifier que φ définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J que l'on précisera. On note $\psi = \varphi^{-1}$ sa réciproque.

22. 2 pt Tracer l'allure du graphe de φ. On fera apparaitre la tangente en 0, sa position par rapport à cette tangente et son comportement asymptotique en $+\infty$. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie 4 : Etude de ψ 5 pt

On admet dans la suite que ψ est $\mathscr{C}^\infty$ sur J.

23. 1 pt Justifier qu'il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\psi(y) \underset{y\to\ln(2)}{=} a_0 + a_1\,(y-\ln(2)) + a_2\,(y-\ln(2))^2 + o\left((y-\ln(2))^2\right).$$

24. 2 pt En utilisant la relation $x = \psi\,(\phi(x))$ déterminer les valeurs de a_0, a_1 et a_2.

25. 2 pt En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de ψ en $\ln(2)$ et préciser la position de sa courbe par rapport à la tangente au voisinage de $\ln(2)$.