Corrigé du Devoir Surveillé 4
Equations différentielles, matrices, analyse asymptotique

Problème I - Equations différentielles

Soient $I = \mathbb{R}_+^*$,

$$f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2\,\mathrm{e}^x}{x^3} \end{array} \qquad \text{et} \qquad F : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

On considère alors les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{rll} (E) : & \forall x \in I, & y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3} \\ (E_1) : & \forall x \in I, & y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^x \\ (E_2) : & \forall x \in I, & y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3} \\ (G) : & \forall x \in I, & z''(x) - 2z'(x) + z(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^4}(x-3)\,. \end{array}$$

1. Pour tout $x \in I$, $x \neq 0$. Donc la fonction f est **continue** sur **l'intervalle** I et $1 \in I$. Donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction F est bien définie, est une primitive de f et est donc $\mathscr{C}^1$ sur I. Conclusion,

$$\boxed{F \text{ est dérivable sur } I \text{ et } \forall x \in I,\ F'(x) = f(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^x}{x^3}.}$$

2. On a

$$\boxed{(E_0) : \qquad \forall x \in I, \quad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0.}$$

L'équation caractéristique associée est

$$(E_c) : \qquad r^2 - 2r + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (r-1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r = 1.$$

L'équation (E_c) admet donc une unique racine double. Conclusion, l'ensemble des solutions de (E_0) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (Ax+B)\,\mathrm{e}^x \end{array} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\,\mathrm{e}^x \end{array}, \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array} \right).}$$

3. On note que dans (E_2) le second membre est de la forme $x \mapsto P(x)\,\mathrm{e}^{mx}$ avec $P = 1$ un polynôme de degré 0 et $m = 1$. Or par la question précédente, 1 est une racine double de l'équation caractéristique associée. On pose donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y_p : x \mapsto \lambda\, x^2\,\mathrm{e}^x$. La fonction y_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur I et pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \lambda\left(2x\,\mathrm{e}^x + x^2\,\mathrm{e}^x\right) = \lambda\left(2x + x^2\right)\mathrm{e}^x \\ y_p''(x) &= \lambda\left[(2+2x)\,\mathrm{e}^x + \left(2x + x^2\right)\mathrm{e}^x\right] = \lambda\left(2 + 4x + x^2\right)\mathrm{e}^x\,. \end{aligned}$$

Dès lors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
y_p \text{ solution de } (E_1) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad y_p''(x) - 2y_p'(x) + y_p(x) = \mathrm{e}^x \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad \lambda\left(2 + 4x + x^2\right)\mathrm{e}^x - 2\,\lambda\left(2x + x^2\right)\mathrm{e}^x + \lambda\, x^2\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad \lambda\left(2 + 4x + x^2 - 4x - 2x^2 + x^2\right) = 1 \qquad \text{car } \mathrm{e}^x \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\,\lambda = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Donc $y_p : x \mapsto \frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^x$ est UNE solution de (E_1). Conclusion, à l'aide de la question précédente, l'ensemble des solutions de (E_1) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = y_p + \mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(\frac{x^2}{2} + Ax + B\right)\mathrm{e}^x \end{array} \middle| \; (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

4. Soit y une solution de (E_2). Alors nécessairement y est deux fois dérivable sur I et de plus,

$$\forall x \in I, \quad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in I, \quad y''(x) = 2y'(x) - y(x) + \frac{\mathrm{e}^x}{x^3}.$$

Puisque y est deux fois dérivable sur I, y et y' sont dérivables sur I. De plus, $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x^3}$ est dérivable sur I (car $x \neq 0$). Par somme, on en déduit que

$$\boxed{y'' \text{ est dérivable sur } I.}$$

Autrement dit,

$$\boxed{y \text{ est trois fois dérivable sur } I.}$$

5. Soit y une solution de (E_2). Alors par la question précédente, y est trois fois dérivable sur I. Donc y' est deux fois dérivable sur I. De plus,

$$\forall x \in I, \quad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^3}.$$

En dérivant cette égalité, ce qui est possible car y, y', y'' et $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x^3}$ sont dérivables sur I, on obtient que

$$\forall x \in I, \quad y'''(x) - 2y''(x) + y'(x) = \frac{\mathrm{e}^x\, x^3 - 3x^2\,\mathrm{e}^x}{x^6} = \frac{\mathrm{e}^x\,(x-3)}{x^4}.$$

Posons $z = y'$. Alors on obtient que

$$\forall x \in I, \quad z''(x) - 2z'(x) + z(x) = \frac{\mathrm{e}^x\,(x-3)}{x^4},$$

i.e. $z = y'$ est solution de (G). Conclusion,

$$\boxed{y \text{ solution de } (E_2) \qquad \Rightarrow \qquad y' \text{ solution de } (G).}$$

6. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $d : x \mapsto \frac{\lambda\,\mathrm{e}^x}{x}$. La fonction d est deux fois dérivable sur I et l'on a pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
d'(x) &= \lambda\,\frac{\mathrm{e}^x\,x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \lambda\,\mathrm{e}^x\,\frac{x-1}{x^2} \\
d''(x) &= \lambda\,\mathrm{e}^x\,\frac{x-1}{x^2} + \lambda\,\mathrm{e}^x\,\frac{x^2 - (x-1)\,2x}{x^4} \\
&= \lambda\,\mathrm{e}^x\left(\frac{x-1}{x^2} + \frac{x - 2x + 2}{x^3}\right) \\
&= \lambda\,\frac{\mathrm{e}^x}{x^3}\left(x^2 - x - x + 2\right) \\
&= \lambda\,\frac{\mathrm{e}^x}{x^3}\left(x^2 - 2x + 2\right).
\end{aligned}$$

Dès lors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
d \text{ solution de } (E_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad d''(x) - 2d'(x) + d(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^3} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad \lambda \frac{\mathrm{e}^x}{x^3}\left(x^2 - 2x + 2\right) - 2\lambda \mathrm{e}^x \frac{x-1}{x^2} + \lambda \frac{\mathrm{e}^x}{x} = \frac{\mathrm{e}^x}{x^3} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad \lambda\left(x^2 - 2x + 2 - 2x(x-1) + x^2\right) = 1 \qquad \text{car } \frac{\mathrm{e}^x}{x} \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\lambda = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Conclusion, une seule fonction $d : x \mapsto \frac{\lambda \mathrm{e}^x}{x}$ est solution de (E_2) :

$$\boxed{d : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\mathrm{e}^x}{2x}. \end{array}}$$

7. Par la question précédente, $d : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{2x}$ est UNE solution de (E_2). De plus l'équation homogène associée à (E_2) donc d'après la question 2. l'ensemble des solutions de (E_2) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_2 = d + \mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(\frac{1}{2x} + Ax + B\right)\mathrm{e}^x \end{array} \middle| \ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

8. On sait que $y_p : x \mapsto \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$ est une solution de (E_1) et $d : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{2x}$ une solution de (E_2). Donc par le principe de superposition,

$$y_p + d : \quad x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + \frac{\mathrm{e}^x}{2x}\right)\mathrm{e}^x \qquad \text{est une solution de } (E).$$

Or (E_0) est toujours l'équation homogène associée à (E). Donc par la question 2. l'ensemble des solutions de l'équation (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_E = y_p + d + \mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x} + Ax + B\right)\mathrm{e}^x \end{array} \middle| \ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

9. On a vu que $d : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{2x}$ est UNE solution de (E_2). Donc par la question 5. $d' : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x\, x - \mathrm{e}^x}{2x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{2x^2}$ est UNE solution de (G). Or (E_0) est l'équation homogène associée à (G). Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_G = d' + \mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(\frac{x-1}{2x^2} + Ax + B\right)\mathrm{e}^x \end{array} \middle| \ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Exercice II - Calculs

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$(I) \text{ est bien définie} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2 \neq 0 \\ x + 4 \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-4; 2\}.$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4; 2\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(I) \ : \quad & \frac{2x+5}{x-2} - \frac{3x-6}{x+4} < 2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(2x+5)(x+4) - (x-2)(3x-6)}{(x-2)(x+4)} < 2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{2x^2 + 8x + 5x + 20 - 3x^2 + 6x + 6x - 12}{(x-2)(x+4)} < 2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{-x^2 + 25x + 8}{(x-2)(x+4)} < 2.
\end{aligned}$$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$(x-2)(x+4)$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

Premier cas, $x \in]-\infty; -4[\cup]2; +\infty[$. Alors,

$$\begin{aligned}
(I) \quad &\Leftrightarrow \quad -x^2+25x+8 < 2(x-2)(x+4) \\
&\Leftrightarrow \quad -x^2+25x+8 < 2x^2+4x-16 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < 3x^2-21x-24 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < x^2-7x-8.
\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé : $\Delta = 49+32 = 81 = 9^2$. Donc les racines associées sont $\frac{7-9}{2} = -1$ et $\frac{7+9}{2} = 8$. D'où

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad x < -1 \ \text{ OU } \ x > 8.$$

Donc dans ce cas, l'ensemble solution est donné par

$$\mathscr{S}_1 =]-\infty; -4[\cup]8; +\infty[\,.$$

Second cas, $x \in]-4; 2[$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
(I) \quad &\Leftrightarrow \quad -x^2+25x+8 > 2(x-2)(x+4) \\
&\Leftrightarrow \quad -x^2+25x+8 > 2x^2+4x-16 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 > 3x^2-21x-24 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 > x^2-7x-8.
\end{aligned}$$

Les racines sont toujours -1 et 8. D'où

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-1; 8[\,.$$

Donc dans ce cas, l'ensemble solution est donné par

$$\mathscr{S}_2 =]-1; 2[\,.$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S}_I = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 =]-\infty; -4[\cup]-1; 2[\cup]8; +\infty[\,.}$$

Vérification : si $x = -5$, $\frac{2x+5}{x-2} - \frac{3x-6}{x+4} = \frac{-5}{-7} - \frac{-21}{-1} = \frac{5}{7} - 21 < 1 - 21 < 2$ *OK ! Si* $x = 0$, $\frac{2x+5}{x-2} - \frac{3x-6}{x+4} = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -1 < 2$ *OK ! Ou encore* $\frac{2x+5}{x-2} - \frac{3x-6}{x+4} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2 - 3 = -1 < 2$ *OK ! Inversement, si* $x = -3$, $\frac{2x+5}{x-2} - \frac{3x-6}{x+4} = \frac{-1}{-5} - \frac{-15}{1} = \frac{1}{5} + 15 > 2$ *OK ! Si* $x = 3$, $\frac{2x+5}{x-2} - \frac{3x-6}{x+4} = \frac{11}{1} - \frac{3}{7} > 11 - 1 = 10 > 2$ *OK !*

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$(J) \ : \quad |3-x| + 2x + 3 < \left|x^2 - x - 2\right| + 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad |3-x| + 2x + 1 < \left|x^2 - x - 2\right|.$$

Soit Δ le discriminant de $x^2 - x - 2$. On a $\Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2$. Donc les racines associées sont $\frac{1-3}{2} = -1$ et $\frac{1+3}{2} = 2$. On obtient alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$\lvert 3-x\rvert$		$3-x$		$3-x$		$3-x$	0	$x-3$	
$\lvert x^2-x-2\rvert$		x^2-x-2	0	$2+x-x^2$	0	x^2-x-2		x^2-x-2	

Premier cas, $x \in]-\infty;-1] \cup [2;3]$. Alors,

$$(J) \quad \Leftrightarrow \quad 3-x+2x+1 < x^2-x-2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x^2-2x-6.$$

Soit Δ le discriminant associé : $\Delta = 4+24 = 28 = 4\times 7$. Donc les racines associées sont $r_1 = \frac{2-2\sqrt{7}}{2} = 1-\sqrt{7}$ et $r_2 = 1+\sqrt{7}$. On a $2 < \sqrt{7} < 3$. Donc $-2 < r_1 < -1$ et $3 < r_2 < 4$. Dans ce cas,

$$\mathscr{S}_1 =]-\infty; r_1[= \left]-\infty; 1-\sqrt{7}\right[.$$

Deuxième cas, $x \in [-1;2]$. Alors,

$$(J) \quad \Leftrightarrow \quad 3-x+2x+1 < 2+x-x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < -2 \text{ impossible.}$$

Dans ce cas,

$$\mathscr{S}_2 = \emptyset.$$

Troisième cas, $x \in [3;+\infty[$. Alors,

$$(J) \quad \Leftrightarrow \quad x-3+2x+1 < x^2-x-2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x^2-4x = x(x-4) \quad \Leftrightarrow \quad x < 0 \text{ OU } x > 4.$$

D'où, dans ce cas,

$$\mathscr{S}_3 =]r_4;+\infty[=]4;+\infty[.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_J = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 \cup \mathscr{S}_3 = \left]-\infty; 1-\sqrt{7}\right[\cup]4;+\infty[.}$$

Vérification : si $x=-2$, $|3-x|+2x+3 < |x^2-x-2|+2 \Leftrightarrow |5|-1 < |4+2-2|+2 \Leftrightarrow 4 < 6$ OK ! Si $x=0$, $|3-x|+2x+3 < |x^2-x-2|+2 \Leftrightarrow 3+3 < 2+2$ ce qui est bien faux, OK ! Si $x=5$, $|3-x|+2x+3 < |x^2-x-2|+2 \Leftrightarrow 2+13 < |25-7|+2 \Leftrightarrow 15 < 20$ OK !

3. On sait que $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$. De plus $\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o\left(u^3\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$. On a alors les points suivants :

   - $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
   - De plus,

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

   - Puis, $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $u(x)^3 \underset{x\to 0}{\sim} x^3$ i.e. $u(x) \underset{x\to 0}{=} x^3 + o\left(x^3\right)$.
   - Enfin,

$$o\left(u(x)^3\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3 + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\sin(x)} &\underset{x\to 0}{=} 1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o\left(u^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x \qquad\qquad -\tfrac{x^3}{6} \quad +o\left(x^3\right)\\
&\qquad\qquad +\tfrac{x^2}{2} \qquad\qquad +o\left(x^3\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +\tfrac{x^3}{6} \quad +o\left(x^3\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x \quad +\tfrac{x^2}{2} \qquad\qquad +o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+2x} &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}(2x)+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}(2x)^2+\frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{6}(2x)^3+o\left((2x)^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x-\frac{1}{8}4x^2+\frac{1}{16}8x^3+o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Par différence,

$$h(x)=\mathrm{e}^{\sin(x)}-\sqrt{1+2x}\underset{x\to 0}{=}1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)-\left(1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)\right)\underset{x\to 0}{=}x^2-\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{h(x)\underset{x\to 0}{=}x^2-\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right).}$$

D'autre part, $\cos(x)\underset{x\to 0}{=}1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)$. Donc

$$1-\cos(x)\underset{x\to 0}{=}\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right).$$

Donc

$$f(x)=\frac{h(x)}{1-\cos(x)}\underset{x\to 0}{=}\frac{x^2-\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)}{\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)}\underset{x\to 0}{=}\frac{2-x+o(x)}{1+o(x)}.$$

Posons $v(x)=o(x)$. Alors $v(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$ et $o(v(x))\underset{x\to 0}{=}o(x)$. Or $\frac{1}{1+v}\underset{v\to 0}{=}1-v+o(v)$. Donc

$$\frac{1}{1+o(x)}\underset{x\to 0}{=}1-o(x)+o(x)\underset{x\to 0}{=}1+o(x).$$

Ainsi,

$$f(x)\underset{x\to 0}{=}(2-x+o(x))(1+o(x))\underset{x\to 0}{=}2-x+o(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x)\underset{x\to 0}{=}2-x+o(x).}$$

4. Soit $g:x\mapsto\sqrt{x^2+x^4}\tan\left(\frac{1}{x}\right)+\ln\left(4+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$. On note que pour tout $x>\frac{2}{\pi}$, on a $0<\frac{1}{x}<\frac{\pi}{2}$ donc $\tan\left(\frac{1}{x}\right)$ existe et $1+\frac{1}{x}>1$ donc $4+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>4>0$ et $x^2+x^4>0$ donc g est bien définie sur $\left]\frac{2}{\pi};+\infty\right[$. Pour tout $x>\frac{2}{\pi}$, posons $h=\frac{1}{x}$. On a

$$\begin{aligned}
g(x)&=\sqrt{\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h^4}}\tan(h)+\ln(4+\arctan(h)+\ln(1+h))\\
&=\frac{\sqrt{1+h^2}}{h^2}\tan(h)+\ln(4+\arctan(h)+\ln(1+h)) \qquad \text{car } h^2>0.
\end{aligned}$$

Or quand $h \to 0$, on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+h^2} &\underset{h\to 0}{=} 1+\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)\\
\tan(h) &\underset{h\to 0}{=} h+\frac{h^3}{3}+o\left(h^2\right)\\
\arctan(h) &\underset{h\to 0}{=} h+o\left(h\right)\\
\ln\left(1+h\right) &\underset{h\to 0}{=} h+o\left(h\right)
\end{aligned}$$

Donc d'une part,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h^4}}\tan\left(h\right) &= \frac{\sqrt{1+h^2}}{h^2}\tan\left(h\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h^2}\left(1+\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)\right)\left(h+\frac{h^3}{3}+o\left(h^2\right)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \tfrac{1}{h^2}(h \quad +\tfrac{h^3}{3} \quad +o\left(h^2\right)\\
&\qquad\qquad +\tfrac{h^3}{2} \quad +o\left(h^3\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\quad +o\left(h^3\right))\\
&\underset{h\to 0}{=} \tfrac{1}{h^2}(h \quad +\tfrac{5h^3}{6} \quad +o\left(h^3\right))\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h}+\frac{5h}{6}+o\left(h\right).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\ln\left(4+\arctan\left(h\right)+\ln\left(1+h\right)\right) &\underset{h\to 0}{=} \ln\left(4+h+o\left(h\right)+h+o\left(h\right)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \ln\left(4+2h+o\left(h\right)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \ln\left(4\right)+\ln\left(1+\frac{h}{2}+o\left(h\right)\right).
\end{aligned}$$

Posons $u(h) \underset{h\to 0}{=} \frac{h}{2}+o\left(h\right)$. Alors,

- $u(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$
- $o\left(u(h)\right) \underset{h\to 0}{=} o\left(\frac{h}{2}+o\left(h\right)\right) \underset{h\to 0}{=} o\left(h\right)$.

Or $\ln\left(1+u\right) \underset{u\to 0}{=} u+o\left(u\right)$. Donc

$$\ln\left(4+\arctan\left(h\right)+\ln\left(1+h\right)\right) \underset{h\to 0}{=} \ln\left(4\right)+\frac{h}{2}+o\left(h\right)+o\left(h\right) \underset{h\to 0}{=} \ln\left(4\right)+\frac{h}{2}+o\left(h\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
g(x) &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h}+\frac{5h}{6}+o\left(h\right)+\ln\left(4\right)+\frac{h}{2}+o\left(h\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h}+\ln(4)+\frac{8h}{6}+o\left(h\right).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} x+\ln(4)+\frac{4}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc la courbe représentative de g admet une asymptote en $+\infty$ d'équation

$$\boxed{y=x+\ln(4).}$$

De plus, on a $g(x) - (x + \ln(4)) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{4}{3x}$ et pour tout $x > 0$, $\frac{4}{3x} > 0$. Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré. Donc pour x assez grand, $g(x) - (x + \ln(4)) > 0$ et donc la courbe représentative de g est

$$\boxed{\text{au-dessus de son asymptote au voisinage de } +\infty.}$$

Problème III - Matrices

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $J \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on pose

$$M(a) = I_p + aJ.$$

Partie 1 : Un exemple et une méthode

On suppose dans cette partie que $p = 3$ et $J = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. On a
$$J^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -J.$$
Conclusion,
$$\boxed{J^2 = -J.}$$

2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: « $J^n = (-1)^{n-1} J$ ».
Initialisation. Si $n = 1$, alors $(-1)^{n-1} J = (-1)^0 J = J = J^1$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors, $J^n = (-1)^{n-1} J$. Puis,
$$J^{n+1} = J^n J = (-1)^{n-1} JJ = (-1)^{n-1} J^2.$$
Par la question précédente,
$$J^{n+1} = (-1)^{n-1} (-1) J = (-1)^n J.$$
Donc $\mathscr{P}(n)$ est vraie. *Conclusion,* pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad J^n = \begin{cases} I_3 \text{ si } n = 0 \\ (-1)^{n-1} J \text{ si } n \neq 0. \end{cases}}$$

3. On a
$$M(a) = I_3 + aJ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2a & -2a & 0 \\ a & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}.$$
Puis, $\mathrm{Tr}(M(a)) = 1 - 2a + 1 + a + 1 - a = 3 - 2a$. Conclusion,
$$\boxed{M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & -2a & 0 \\ a & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tr}(M(a)) = 3 - 2a.}$$

4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Par la question précédente, on a
$$M(a) \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad -2a = a \quad \Leftrightarrow \quad a = 0.$$
Conclusion,
$$\boxed{M(a) \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad a = 0.}$$

5. Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M(a)P = PD \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1-2a & -2a & 0 \\ a & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2-2a & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta & 0 \\ -\alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 = \alpha \\ 2-2a = 2\beta \\ a-1 = -\beta \\ 1-a = \gamma \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1-a \\ \gamma = 1-a \end{cases}.
\end{aligned}$$

Conclusion, en posant

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix},}$$

alors on a bien $D \in \mathscr{D}_3(\mathbb{R})$ et $M(a)P = PD$.

6. Par l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
P &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & & I_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 & &\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 & & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 & &\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Puisque $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, on en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$ de plus,

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Vérification,

$$P^{-1}P = P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \ \ OK\,!$$

7. Par la question 5. on a $M(a)P = PD$. De plus par la question précédente P est inversible donc

$$M(a) = M(a)PP^{-1} = PDP^{-1}.$$

Puis par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(a)^n = PD^nP^{-1}$. Puisque D est diagonale, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-a)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} M(a)^n &= PD^nP^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-a)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ (1-a)^n & (1-a)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(1-a)^n - 1 & 2(1-a)^n - 2 & 0 \\ 1-(1-a)^n & 2-(1-a)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad M(a)^n = \begin{pmatrix} 2(1-a)^n - 1 & 2(1-a)^n - 2 & 0 \\ 1-(1-a)^n & 2-(1-a)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)^n \end{pmatrix}.}$$

En particulier pour $a = -1$ et $n = 3$, on a $(1-a)^n = (2)^3 = 8$ et donc

$$\boxed{M(-1)^3 = \begin{pmatrix} 16-1 & 16-2 & 0 \\ 1-8 & 2-8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 14 & 0 \\ -7 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.}$$

Partie 2 : Cas général par une autre méthode

On reprend $p \in \mathbb{N}^*$ et on fixe pour tout le reste du problème $J \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $J^2 = -J$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

8. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})^2$ telles que $AB = BA$. Alors,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.}$$

9. Par définition, $M(a) = I_p + aJ$. De plus, on a $I_p(aJ) = aJI_p = aJ$. Donc par la formule du binôme de Newton,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (M(a))^n = (I_p + aJ)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aJ)^k I_p^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k J^k.$$

Or $J^2 = -J$. Donc par récurrence, comme dans la question 2.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad J^k = \begin{cases} I_3 \text{ si } k = 0 \\ (-1)^{k-1} J \text{ si } k \neq 0. \end{cases}$$

Ainsi, si $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} M(a)^n &= I_p + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k (-1)^{k-1} J \\ &= I_p - \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-a)^k \right) J \\ &= I_p - \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-a)^k - 1 \right) J \\ &= I_p - \left((1-a)^n - 1 \right) J. \end{aligned}$$

On note que le résultat reste vrai si $n = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad M(a)^n = I_p + \left(1 - (1-a)^n\right) J.}$$

10. Si $p = 3$, $J = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ alors par la question 1. on a bien $J^2 = -J$. Si $n = 3$ et $a = -1$, la question précédente implique que

$$M(-1)^3 = I_3 + \left(1 - 2^3\right) J = I_3 - 7J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 14 & 0 \\ -7 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{on retrouve bien le résultat de la question 7.}}$$

Partie 3 : Inversibilité

On suppose toujours que $J^2 = -J$. On suppose de plus que $J \neq 0_p$.

11. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a les calculs matriciels suivants :

$$\begin{aligned} M(a)M(b) = (I_p + aJ)(I_p + bJ) &= I_p + aJ + bJ + abJ^2 \\ &= I_p + aJ + bJ - abJ \qquad \text{car } J^2 = -J \\ &= I_p + (a + b - ab) J. \end{aligned}$$

Conclusion, en posant $\boxed{c = a + b - ab}$, on a bien $\boxed{M(a)M(b) = M(c)}$.

12. Par définition, $M(0) = I_p + 0_p = I_p$. *On aime bien les questions de ce genre.* Conclusion,

$$\boxed{M(0) = I_p.}$$

13. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Cherchons $b \in \mathbb{R}$ tel que $c = a + b - ab = 0$ car alors d'après les deux questions précédentes, on aurait

$$M(a)M(b) = M(c) = M(0) = I_p.$$

Ce qui impliquerait bien que $M(a)$ est inversible et d'inverse $M(b)$. On a les équivalences suivantes :

$$a + b - ab = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad b(1-a) = -a \qquad \Leftrightarrow \qquad b = \frac{a}{a-1} \qquad \text{car } a \neq 1.$$

Posons $b = \frac{a}{a-1} \in \mathbb{R}$. Alors par la question 11.

$$M(a)M(b) = M(c) = M(a+b-ab) = M\left(a + \frac{a}{a-1} - a\frac{a}{a-1}\right) = M\left(\frac{a^2-a+a-a^2}{a-1}\right) = M(0).$$

Donc par la question précédente,

$$M(a)M(b) = I_p.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad M(a) \text{ est inversible et } M(a)^{-1} = M\left(\frac{a}{a-1}\right).}$$

14. Par la question 11.

$$M(1)^2 = M(1+1-1) = M(1).$$

Procédons par l'absurde et supposons $M(1)$ inversible. Alors $M(1)^{-1}$ existe. En multipliant par $M(1)^{-1}$ l'égalité précédente,

$$M(1) = I_p \qquad \Leftrightarrow \qquad I_p + 1 \times J = I_p \qquad \Leftrightarrow \qquad J = 0_p.$$

Or on a supposé $J \neq 0_p$. Conclusion,

$$\boxed{M(1) \text{ n'est pas inversible.}}$$

Partie 4 : Troisième méthode

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1-a)\,u_n + a$. On pourra s'appuyer sur la partie 3 mais pas sur la partie 2

15. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $M(a)^n = M(u_n)$ ».

Initialisation. Si $n = 0$, par définition, $M(a)^0 = I_p$ et $M(u_0) = M(0)$. Or par la question 12. $M(0) = I_p$. Ainsi, $M(a)^0 = M(u_0)$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons alors $\mathscr{P}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned} M(a)^{n+1} = M(a)M(a)^n &= M(a)M(u_n) && \text{par hyopthèse de récurrence} \\ &= M(a + u_n - au_n) && \text{par la question 11.} \\ &= M(a + (1-a)\,u_n) \\ &= M(u_{n+1}) && \text{par construction de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad M(a)^n = M(u_n).}$$

16. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\omega = (1-a)\,\omega + a \qquad \Leftrightarrow \qquad a\,\omega = a \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega = 1 \qquad \text{car } a \neq 0.$$

Conclusion, pour $\boxed{\omega = 1}$ on a bien $\omega = (1-a)\,\omega + a$. On fixe dans la suite $\omega = 1$.

17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \omega = u_n - 1$. On a alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = a + (1-a)\, u_n - 1 = (1-a)\,(u_n - 1) = (1-a)\, v_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison } (1-a).}$$

18. On déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = (1-a)^n\, v_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - 1 = (1-a)^n\,(u_0 - 1) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 - (1-a)^n\,. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 1 - (1-a)^n\,.}$$

19. Si $p = 3$, $J = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $n = 3$ et $a = -1$, par la question précédente,

$$u_3 = 1 - 2^3 = -7.$$

Donc par la question 15.

$$\begin{aligned} M\,(a)^n = M\,(-1)^3 = M\,(u_3) = M\,(-7) &= I_3 - 7J \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 15 & 14 & 0 \\ -7 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{on retrouve une fois encore le résultat de la question 7.}}$$

Problème IV - Analyse asymptotique

Partie 1 : Construction de f

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose

$$f_0(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^{n+1}\right).$$

Donc

$$\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^{n+1}\right).$$

Enfin,

$$f_0(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{k!} + o\left(x^n\right)$$

Posons $\tilde{k} = k - 1$. Si $k = 1$, $\tilde{k} = 0$ et si $k = n+1$, alors $\tilde{k} = n$. D'où

$$f_0(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{\tilde{k}=0}^{n} \frac{x^{\tilde{k}}}{(\tilde{k}+1)!} + o\left(x^n\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{f_0(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(k+1)!} + o\left(x^n\right).}$$

2. Pour $n = 3$, on a

$$f_0(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + o\left(x^3\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{f_0(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o\left(x^3\right).}$$

3. Par la question précédente,

$$f_0(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^0}{1!} + o(1) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(1).$$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f_(x) = 1$ et

$$\boxed{f_0 \text{ est bien prolongeable par continuité en } 0}$$

en posant pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = f_0(x)$ et $\boxed{f(0) = 1}$.

4. Par la question 1. on a aussi

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^k}{(k+1)!} + o\left(x^n\right).$$

En particulier f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0. Donc

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0.}$$

Cependant $\boxed{\text{rien ne nous garantit a priori si } f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ ou } \mathscr{C}^n \text{ ou non}}$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, par factorisation par l'angle moitié,

$$f(x) = f_0(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{x} = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \frac{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}{x}.$$

Conclusion, en prenant $\boxed{a = b = 1/2}$, on a bien

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{x}.}$$

6. On sait que

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{x^2}{4}}{2} + \frac{\frac{x^3}{8}}{6} + o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48} + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{\frac{x^3}{8}}{6} + o\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{x^3}{48} + o\left(x^4\right).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{x} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{2}{x}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{48} + o\left(x^4\right)\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48} + o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1 + \frac{x^2}{24} + o\left(x^3\right)\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48} + o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{llll}
1 + \frac{x}{2} & +\frac{x^2}{8} & +\frac{x^3}{48} & +o\left(x^3\right) \\
 & +\frac{x^2}{24} & +\frac{x^3}{48} & +o\left(x^3\right) \\
 & & & +o\left(x^3\right)
\end{array} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{4x^2}{24} + \frac{2x^3}{48} + o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question 2.

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o\left(x^3\right).}$$

Partie 2 : Construction de φ

On donne

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

On admet que f est continue sur $\mathbb{R}$ et on donne

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o\left(x^3\right).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On définit également pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$\varphi_0(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

7. Soit $x \in]0;+\infty[$. Alors $[x;2x] \subseteq \mathbb{R}_+^*$. De plus $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $[x;2x]$. Donc

$$\varphi_0(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ existe.}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in]0;+\infty[$, on en conclut que

$$\boxed{\varphi_0 \text{ est bien définie sur }]0;+\infty[\,.}$$

8. Puisque la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\text{par le théorème fondamental de l'analyse,}}$$

F existe, est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est une primitive de f de $\mathbb{R}$. Or f est continue donc

$$\boxed{F \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } F' = f.}$$

9. Puisque $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o\left(x^3\right)$, par le théorème de primitivation du développement limité,

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{96} + o\left(x^4\right).$$

Or $F(0) = \int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Conclusion,

$$\boxed{F(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{96} + o\left(x^4\right).}$$

10. Soit $x \in]0;+\infty[$. On a les égalités dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} + \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_x^{0} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{2x} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t + \left[\ln\left(|t|\right)\right]_{t=x}^{t=2x} \qquad \text{par la relation de Chasles} \\
&= -\int_0^{x} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t + F\left(2x\right) + \ln\left(2x\right) - \ln(x) \qquad \text{car } x > 0 \\
&= -F(x) + F\left(2x\right) + \ln\left(\frac{2x}{x}\right) \\
&= F\left(2x\right) - F(x) + \ln(2).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[\,, \quad \varphi_0(x) = F\left(2x\right) - F(x) + \ln(2).}$$

11. Par la 9.

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{96} + o\left(x^4\right)$$
$$F\left(2x\right) \underset{x\to 0}{=} 2x + \frac{4x^2}{4} + \frac{8x^3}{18} + \frac{2^4x^4}{96} + o\left(x^4\right).$$

Donc par la question précédente,

$$\varphi_0(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{3x^2}{4} + \frac{7x^3}{18} + \frac{15x^4}{96} + o\left(x^4\right) + \ln(2).$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi_0(x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + x + \frac{3x^2}{4} + \frac{7x^3}{18} + \frac{15x^4}{96} + o\left(x^4\right).}$$

12. Notamment, $\varphi_0(x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + o\left(1\right)$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi_0(x) = \ln(2)$. Ainsi,

$$\boxed{\varphi_0 \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$$

en posant

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \varphi_0(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \ln(2) & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Partie 3 : Etude de φ

13. Par la question 11. on a

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + x + \frac{3x^2}{4} + o\left(x^2\right).$$

Donc le graphe de φ admet une tangente en 0 d'équation

$$\boxed{y = \ln(2) + x.}$$

De plus,

$$\varphi(x) - (\ln(2) + x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3x^2}{4}$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{3x^2}{4} \geqslant 0$. Or deux équivalents ont même signe au voisinage considéré. Donc au voisinage de 0, $\varphi(x) - (\ln(2) + x) \geqslant 0$ et

$$\boxed{\text{le graphe de } \varphi \text{ est au-dessus de sa tangente au voisinage de } 0.}$$

14. Par les questions précédentes,

$$\forall x \in \left]0; +\infty\right[, \quad \varphi(x) = \varphi_0(x) = F\left(2x\right) - F(x) + \ln(2).$$

Or F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\boxed{\varphi \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \left]0; +\infty\right[.}$$

De plus, pour tout $x \in]0;;+\infty[$,

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= 2F'(2x) - F'(x) \\
&= 2f(2x) - f(x) \qquad \text{par la question 8.} \\
&= 2\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x} - \frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2x}-1-\mathrm{e}^{x}+1}{x} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}}{x}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[\,, \qquad \varphi'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}}{x}.}$$

15. Posons $x = 1+h$ i.e. $h = x-1$. Quand $x \to 1$, on a $h \to 0$. Par la question précédente,

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}}{x} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2+2h}-\mathrm{e}^{1+h}}{1+h} \\
&\underset{h\to 0}{=} \left(\mathrm{e}^2\,\mathrm{e}^{2h} - \mathrm{e}\,\mathrm{e}^{h}\right)\left(1-h+h^2-h^3+o\left(h^3\right)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \left(\mathrm{e}^2\left(1+2h+\frac{4h^2}{2}+\frac{8h^3}{6}+o\left(h^3\right)\right) - \mathrm{e}\left(1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+o\left(h^3\right)\right)\right) \\
&\qquad\qquad \times\left(1-h+h^2-h^3+o\left(h^3\right)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}+\left(2\,\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\right)h+\frac{4\,\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}{2}h^2+\frac{8\,\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}{6}h^3+o\left(h^3\right)\right)\left(1-h+h^2-h^3+o\left(h^3\right)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \begin{array}{llllll}
\mathrm{e}^2-\mathrm{e} & +\left(2\,\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\right)h & +\frac{4\,\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}{2}h^2 & +\frac{8\,\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}{6}h^3 & +o\left(h^3\right) \\
 & -\left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\right)h & -\left(2\,\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\right)h^2 & -\frac{4\,\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}{2}h^3 & +o\left(h^3\right) \\
 & & +\left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\right)h^2 & +\left(2\,\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\right)h^3 & +o\left(h^3\right) \\
 & & & -\left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\right)h^3 & +o\left(h^3\right) \\
 & & & & +o\left(h^3\right) \\
\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^2-\mathrm{e} & +2\,\mathrm{e}^2\,h & +\left(\mathrm{e}^2-\frac{\mathrm{e}}{2}\right)h^2 & +\frac{\mathrm{e}^2+\mathrm{e}}{3}h^3 & +o\left(h^3\right).
\end{array}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi'(x) \underset{x\to 1}{=} \mathrm{e}^2-\mathrm{e}+2\,\mathrm{e}^2\,(x-1)+\left(\mathrm{e}^2-\frac{\mathrm{e}}{2}\right)(x-1)^2+\frac{\mathrm{e}^2+\mathrm{e}}{3}(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right).}$$

16. Par la question précédente, φ' admet un développement limité à l'ordre 1 en 1 donné par

$$\varphi'(x) \underset{x\to 1}{=} \mathrm{e}^2-\mathrm{e}+2\,\mathrm{e}^2\,(x-1)+o\,(x-1).$$

Or φ est une primitive de φ sur $]0;+\infty[$ (voisinage de 1). Donc par le théorème de primitivation du développement limité :

$$\varphi(x) \underset{x\to 1}{=} \varphi(1)+\left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\right)(x-1)+\mathrm{e}^2\,(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right).$$

On en déduit que le graphe de φ admet une tangente en 1 d'équation

$$\boxed{y = \varphi(1)+\left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\right)(x-1).}$$

De plus,

$$\varphi(x) - \varphi(1) + \left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\right)(x-1) \underset{x\to 1}{\sim} \mathrm{e}^2 (x-1)^2 .$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^2 (x-1)^2 \geqslant 0$. Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré. Donc le graphe de φ est au voisinage de 1,

$$\boxed{\text{au dessus de sa tangente.}}$$

17. Soit $x > 0$ et $t \in [x; 2x]$. Par croissance de l'intégrale, $\mathrm{e}^t \geqslant \mathrm{e}^x$. D'autre part $0 < t \leqslant 2x$ donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$, $\frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{2x}$. Les termes étant positifs, par produit,

$$\boxed{\forall x \in]0; +\infty[\,,\ \forall t \in [x; 2x]\,, \qquad \frac{\mathrm{e}^t}{t} \geqslant \frac{\mathrm{e}^x}{2x}.}$$

18. Soit $x \in]0; +\infty[$. Alors $2x \geqslant x$ **(important !)**. Donc par la question précédente et la croissance de l'intégrale, on a

$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^x}{2x}\,\mathrm{d}t \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2x}\int_x^{2x} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^x}{2x} \times (2x - x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]0; +\infty[\,,\ \varphi(x) \geqslant \frac{\mathrm{e}^x}{2}.}$$

19. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{2} = +\infty$. Donc par la question précédente et le théorème de minoration,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty.}$$

De plus, toujours par la question précédente, pour tout $x > 0$, $\frac{\varphi(x)}{x} \geqslant \frac{\mathrm{e}^x}{2x}$. Or par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{2x} = +\infty$. Par le théorème de minoration,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{le graphe de } \varphi \text{ présente une branche parabolique verticale en } +\infty.}$$

20. On sait que φ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$, $\varphi'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}{x}$. La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $x < 2x \ \Rightarrow\ \mathrm{e}^x < \mathrm{e}^{2x}$. Donc

$$\forall x \in]0; +\infty[\,, \quad \varphi'(x) > 0.$$

Donc la fonction φ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Or φ est continue en 0. Donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, $\varphi(0) = \ln(2)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$. Conclusion,

x	0	$+\infty$
g	$\ln(2)$ $\nearrow$	$+\infty$

21. Par ce qui précède,

    - La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+$,
    - la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,
    - $\mathbb{R}_+$ est un intervalle.

    Donc par le théorème de la bijection, φ définit une bijection de φ dans $\varphi(\mathbb{R}_+)$ et de plus, $J = \varphi(\mathbb{R}_+) = \left[\varphi(0); \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)\right[= [\ln(2); +\infty[$. Conclusion,

    $$\boxed{\varphi \text{ définit une bijection de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } J = [\ln(2); +\infty[.}$$

    On note $\psi = \varphi^{-1}$ sa réciproque.

22. DESSIN !!!

Partie 4 : Etude de ψ

On admet dans la suite que ψ est $\mathscr{C}^\infty$ sur J.

23. Puisque ψ est $\mathscr{C}^\infty$ sur J, ψ est $\mathscr{C}^2$ sur J donc notamment en $\ln(2) \in J$. Donc par le théorème de Taylor-Young, ψ admet un développement limité à l'ordre 2 en $\ln(2)$:

    $$\boxed{\exists\,(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3, \quad \psi(y) \underset{y\to\ln(2)}{=} a_0 + a_1\,(y - \ln(2)) + a_2\,(y - \ln(2))^2 + o\left((y - \ln(2))^2\right).}$$

24. On sait par la question 11.

    $$\varphi(x) \underset{x\to0}{=} \ln(2) + x + \frac{3x^2}{4} + o\left(x^2\right).$$

    Donc

    $$x \underset{x\to0}{=} \psi\left(\ln(2) + x + \frac{3x^2}{4} + o\left(x^2\right)\right).$$

    Posons $y(x) \underset{x\to0}{=} \ln(2) + x + \frac{3x^2}{4} + o\left(x^2\right)$. Dès lors $y(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} \ln(2)$. Donc par la question précédente,

    $$x \underset{x\to0}{=} a_0 + a_1\,(y(x) - \ln(2)) + a_2\,(y(x) - \ln(2))^2 + o\left((y(x) - \ln(2))^2\right).$$

    Ou encore, en posant $u(x) \underset{x\to0}{=} y(x) - \ln(2) \underset{x\to0}{=} x + \frac{3x^2}{4} + o\left(x^2\right)$,

    $$x \underset{x\to0}{=} a_0 + a_1 u(x) + a_2 u(x)^2 + o\left(u(x)^2\right).$$

    Calculons :

    - $u(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$,
    - puis,
    $$u(x)^2 \underset{x\to0}{=} \left(x + \frac{3x^2}{4} + o\left(x^2\right)\right)\left(x + \frac{3x^2}{4} + o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to0}{=} x^2 + o\left(x^2\right).$$
    - Enfin,
    $$o\left(u(x)^2\right) \underset{x\to0}{=} o\left(x^2 + o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to0}{=} o\left(x^2\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
x &\underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 u(x) + a_2 u(x)^2 + o\left(u(x)^2\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x \quad + a_1 \tfrac{3x^2}{4} \quad + o\left(x^2\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + a_2 x^2 \quad + o\left(x^2\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + o\left(x^2\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \left(\frac{3a_1}{4} + a_2\right) x^2 + o\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité,

$$\begin{cases} 0 &= a_0 \\ 1 &= a_1 \\ 0 &= \frac{3a_1}{4} + a_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= -\frac{3a_1}{4} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_2 = -\frac{3}{4}.}$$

25. Par la question précédente,

$$\psi(y) \underset{y\to \ln(2)}{=} (y - \ln(2)) - \frac{3}{4}(y - \ln(2))^2 + o\left((y - \ln(2))^2\right).$$

Donc la courbe représentative de ψ admet une tangente en $\ln(2)$ d'équation

$$\boxed{y = x - \ln(2).}$$

De plus, on a

$$\psi(y) - (y - \ln(2)) \underset{y\to \ln(2)}{\sim} -\frac{3}{4}(y - \ln(2))^2.$$

et pour tout $y \geqslant 2$, $-\frac{3}{4}(y - \ln(2))^2 \leqslant 0$. Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré. Donc la courbe représentative de ψ se trouve

$$\boxed{\text{en dessous de sa tangente au voisinage de } \ln(2).}$$