Epreuve de mathématiques 5
2023-2024

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 3h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

lycée Raoul Follereau

Problème 1 - Ensembles et applications

On pose $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $g \in E$ fixée, on définit l'application φ par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & g \circ f. \end{array}$$

Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on note $\tilde{c}$ la fonction constante égale à c, $\tilde{c} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & c. \end{array}$ On rappelle que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est la fonction telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(x) = x$.

Partie 1 : Niveau 1 : un exemple

On suppose dans cette partie que $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$.

1. La fonction sin est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier chaque réponse.
2. Calculer $\varphi\left(\tilde{0}\right)$ et $\varphi\left(\widetilde{2\pi}\right)$.
3. La fonction φ est-elle injective ?
4. Justifier que la fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ n'est pas dans $\varphi(E)$.
5. La fonction φ est-elle surjective ?

Partie 2 : Niveau 2 : un second exemple

On suppose dans cette partie que $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

6. La fonction g est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier chaque réponse.
7. Montrer que φ n'est pas injective.
8. Montrer que φ n'est pas surjective.
9. Soit $h \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Déterminer une fonction $f \in E$ tel que $\varphi(f) = h$.
10. Montrer que $\varphi(E) = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.
11. Montrer que $\varphi^{-1}\left(\left\{\tilde{1}\right\}\right) = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \{-1; 1\})$.

Partie 3 : Niveau 3 : cas général

On reprend g une fonction quelconque de $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

12. On suppose g surjective.
    (a) Soit $h \in E$. Justifier l'assertion suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists x' \in \mathbb{R},\ h(x) = g(x')$.
    On note f la fonction qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe ce réel x', $f : x \mapsto x'$.
    (b) Montrer que φ est surjective.
13. On suppose φ surjective. Montrer que g est surjective.
    Indication : pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pourra considérer $\tilde{y}$ la fonction constante égale à y.
14. Montrer que g est injective si et seulement si φ est injective.
15. Montrer que φ est bijective si et seulement si g est bijective.
    Dans ce cas, préciser φ^{-1} en fonction de g^{-1}.

Problème 2 - Continuité-dérivabilité

On considère la fonction $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]0;1], \quad g(x) = x\ln(x).$$

On considère également $h : [-1;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \sqrt{|x|}g\left(|x|\right)$$

Partie 1 : Etude de g et h

1. Montrer que g et h sont continues sur $[0;1]$.
2. A l'aide d'un théorème du cours que l'on précisera, justifier l'existence de $\sup\limits_{x\in[0;1]} |g(x)|$.
3. Montrer que h est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1;1]$.
4. La fonction h admet-elle un développement limité d'ordre 1 en 0 ? Si oui le déterminer.
5. La fonction h est-elle deux fois dérivable ?
6. Déterminer le domaine de dérivabilité de g.
7. Dresser le tableau de variations de g' puis celui de g. Tracer l'allure de la courbe de g en annexe. On fera apparaitre les tangentes en 0 et en 1.
8. En déduire $M = \sup\limits_{x\in\left[\mathrm{e}^{-3/2};\mathrm{e}^{-1}\right]} |g'(x)|$.

Partie 2 : Etude d'une suite récurrente

On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $t_0 \in \left[\mathrm{e}^{-3/2};\mathrm{e}^{-1}\right]$ et pour tout entier naturel n

$$t_{n+1} = -g\left(t_n\right).$$

9. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n

$$t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^{-1}.$$

10. En déduire que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l.
11. Déterminer la valeur de l.
12. Montrer que pour tout réel $x \in \left[\mathrm{e}^{-3/2};\mathrm{e}^{-1}\right]$,

$$\left|g(x) - g\left(\mathrm{e}^{-1}\right)\right| \leqslant \frac{\left|x - \mathrm{e}^{-1}\right|}{2}.$$

13. En déduire que pour tout entier naturel

$$\left|t_n - \mathrm{e}^{-1}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|t_0 - \mathrm{e}^{-1}\right|.$$

14. Retrouver alors le résultat de la question 11.

Problème 3 - Analyse Asymptotique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la FONCTION ITÉRÉE $n^{\text{IÈME}}$ de l' arctangente, que l'on note $\arctan^{[n]}$, par :

$$\arctan^{[n]} = \underbrace{\arctan \circ \arctan \circ \cdots \circ \arctan}_{n \text{ fois}}$$

où $\circ$ désigne la composition entre fonctions.

Partie 1 : L'itérée première

Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Préciser le développement limité à l'ordre $2p$ en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
2. En déduire le développement limité à l'ordre $2p+1$ en 0 de arctan.
3. Déterminer un équivalent en 0 de $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(2x)} - \frac{1}{\arctan(2x)}$.
4. On considère la fonction
$$f : x \mapsto x^{3/2}\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan(x+1)}.$$
Montrer que f admet une asymptote en $+\infty$, déterminer son équation et préciser la position de la courbe de f par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Partie 2 : L'itérée deuxième

5. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\arctan^{[2]} = \arctan \circ \arctan$.
6. On considère la fonction g définie par
$$g : x \mapsto \left(\frac{\arctan^{[2]}(x)}{x}\right)^{\frac{\cos(x)}{x}}.$$
Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement $\tilde{g}$ est dérivable en 0. Préciser la tangente de $\tilde{g}$ en 0 et la position de la courbe de $\tilde{g}$ par rapport à cette tangente au voisinage de 0. Représenter sur votre copie l'allure locale de la courbe de $\tilde{g}$ au voisinage de 0.

Partie 3 : L'itérée n-ième

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\arctan^{[n]}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\arctan^{[n]}$ admet un développement limité à tout ordre en 0 et préciser sa forme.

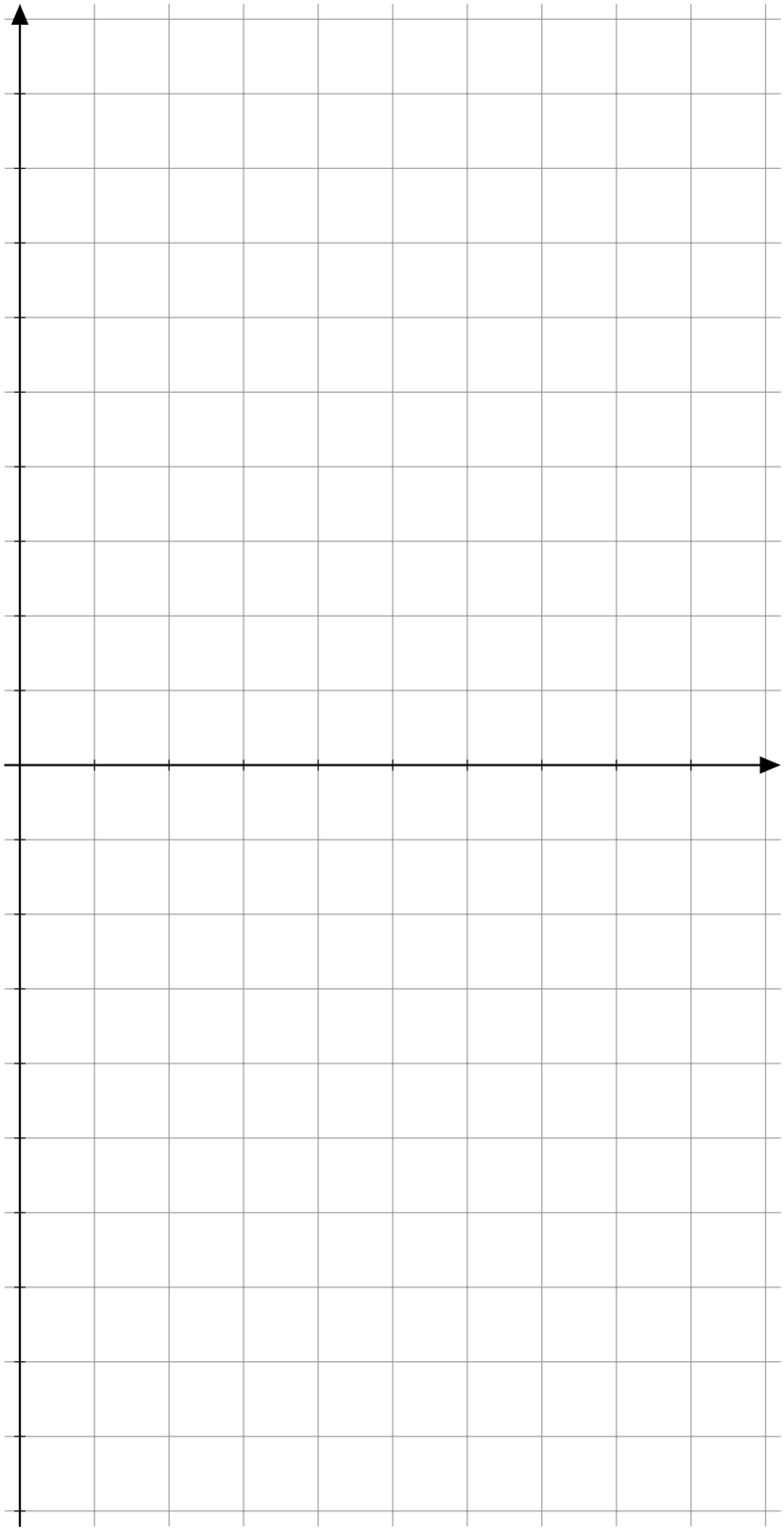
On admet dans la suite qu'il existe trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\arctan^{[n]}(x) \underset{x\to 0}{=} a_n x + b_n x^3 + c_n x^5 + o\left(x^5\right).$$

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le développement à l'ordre 5 de $\arctan^{[n+1]} = \arctan^{[n]} \circ \arctan$ en fonction de a_n, b_n et c_n.

10. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une formule de récurrence de a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n.
11. Préciser quelle suite de référence est $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis donner a_n en fonction de n.
12. Préciser quelle suite de référence est $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis donner b_n en fonction de n.
13. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On considère la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k),$$

    Exprimer S_n de deux façons : l'une en fonction de c_n et l'autre en fonction de n.
14. En déduire le développement à l'ordre 5 en 0 de $\arctan^{[n]}$
15. Vérifier la cohérence avec des résultats obtenus dans les parties précédentes.

ANNEXE

A RENDRE AVEC LA COPIE