# Corrigé du Devoir Surveillé 5
# Ensembles, applications, continuité, dérivabilité, analyse asymptotique

## Problème I - Ensembles et applications

On pose $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $g \in E$ fixée, on définit l'application $\varphi$ par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & g \circ f. \end{array}$$

Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on note $\tilde{c}$ la fonction constante égale à $c$, $\tilde{c} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & c. \end{array}$ On rappelle que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est la fonction suivante : $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x. \end{array}$

### Partie 1 : Niveau 1 : un exemple

On suppose dans cette partie que $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$.

1. On a $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$. Donc 0 a deux antécédents distincts. Donc sin n'est pas injective. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) \neq 2$ donc 2 n'a pas d'antécédent. Donc sin n'est pas surjective. La fonction sin n'étant ni injective ni surjective, a fortiori, elle n'est pas bijective. Conclusion,

$$\boxed{\text{sin n'est ni injective, ni surjective, ni bijective.}}$$

2. Par définition,

$$\varphi\left(\tilde{0}\right) = \sin \circ \tilde{0}.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi\left(\tilde{0}\right)(x) = \sin \circ \tilde{0}(x) = \sin\left(\tilde{0}(x)\right) = \sin(0) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\varphi\left(\tilde{0}\right) = \tilde{0}$ est la fonction constante égale à 0. De même,

$$\varphi\left(\tilde{2\pi}\right)(x) = \sin \circ \tilde{2\pi}(x) = \sin\left(\tilde{2\pi}(x)\right) = \sin(2\pi) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi\left(\tilde{0}\right) = \varphi\left(\tilde{2\pi}\right) = \tilde{0}.}$$

3. Par la question précédente, on a $\varphi\left(\tilde{0}\right) = \varphi\left(\tilde{2\pi}\right)$ donc directement,

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective.}}$$

4. Procédons par l'absurde. Supposons que $Id_{\mathbb{R}} \in \varphi(E)$. Alors, il existe $f \in E$ telle que

$$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} = \varphi(f) = \sin \circ f.$$

Dès lors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x = \sin(f(x)).$$

En particulier, pour $x = 2$, on obtient $2 = \sin(f(2))$. Or pour tout $u \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(u) \leqslant 1$. Contradiction. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \notin \varphi(E).}$$

5. Par la question précédente, $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ n'a aucun antécédent par la fonction $\varphi$. Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas surjective.}}$$

## Partie 2 : Niveau 2 : un second exemple

On suppose dans cette partie que $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

6. On note que $g(-1) = 1 = g(1)$. Donc 1 possède deux antécédents distincts par $g$, donc $g$ n'est pas injective.

   D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 \geqslant 0$. Donc $g(x) \neq -1$. Donc $-1$ n'a aucun antécédent par $g$ et $g$ n'est pas surjective.

   Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ n'est ni injective, ni surjective, ni bijective.}}$$

7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi\left(\tilde{1}\right)(x) = g\left(\tilde{1}(x)\right) = g(1) = 1.$$

   De même,

$$\varphi\left(\tilde{-1}\right)(x) = g\left(\tilde{-1}(x)\right) = g(-1) = 1.$$

   Donc $\varphi\left(\tilde{1}\right) = \varphi\left(\tilde{-1}\right) = \tilde{1}$. Or $\tilde{1} \neq \tilde{-1}$. Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective.}}$$

   *On pouvait aussi montrer par exemple que $\varphi(Id_{\mathbb{R}}) = \varphi(-Id_{\mathbb{R}})$.*

8. Soit $f \in E$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(f)(x) = g(f(x)) = f(x)^2 \geqslant 0.$$

   Donc par exemple, $\varphi(f) \neq \tilde{-1}$. Ceci étant vrai pour tout $f \in E$, on en déduit que $\tilde{-1}$ n'a aucun antécédent par $\varphi$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ n'est pas surjective.}}$$

   *On pouvait aussi montrer que $Id_{\mathbb{R}}$ n'admet aucun antécédent.*

9. Soit $h \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Soit $f \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$\varphi(f) = h \quad \Leftrightarrow \quad g \circ f = h \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(f(x)) = h(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)^2 = h(x).$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) \in \mathbb{R}_+$. Donc $\sqrt{h(x)}$ existe. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{h(x)}$ i.e. $f = \sqrt{h}$. Alors, on a bien

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)^2 = \left(\sqrt{h(x)}\right)^2 = h(x).$$

   Donc par les équivalences précédentes, on obtient

$$\varphi(f) = h.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\text{pour } f = \sqrt{h}, \text{ on a } \varphi(f) = h.}$$

10. Procédons par double inclusion. Soit $h \in \varphi(E)$. Alors, il existe $f \in E$ telle que $h = \varphi(f)$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x)^2.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) \geqslant 0$. Ainsi, $h \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Ceci étant vrai pour $h \in \varphi(E)$ quelconque, on en déduit que

$$\varphi(E) \subseteq \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+).$$

Réciproquement, soit $h \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Alors par la question précédente, on a $f = \sqrt{h} \in E$ et $\varphi(f) = h$. Donc $h \in \varphi(E)$. D'où,

$$\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+) \subseteq \varphi(E).$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi(E) = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+).}$$

11. Soit $f \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} f \in \varphi^{-1}(\{\tilde{1}\}) & \Leftrightarrow & \varphi(f) \in \{\tilde{1}\} \\ & \Leftrightarrow & \varphi(f) = \tilde{1} \\ & \Leftrightarrow & f^2 = \tilde{1} \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)^2 = 1 \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, \quad (f(x) = 1 \text{ OU } f(x) = -1) \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \in \{-1; 1\} \\ & \Leftrightarrow & f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \{-1; 1\}). \end{array}$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi^{-1}(\{\tilde{1}\}) = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \{-1; 1\}).}$$

## Partie 3 : Niveau 3 : cas général

On reprend $g$ une fonction quelconque de $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

12. On suppose $g$ surjective.

    (a) Soit $h \in E$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $h$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $h(x)$ existe et $h(x) \in \mathbb{R}$. Or $g$ est surjective sur $\mathbb{R}$ donc il existe $x' \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = g(x')$. Conclusion,

    $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exists x' \in \mathbb{R},\ h(x) = g(x').}$$

    On note $f$ la fonction qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe ce réel $x'$, $f : x \mapsto x'$.

    (b) Soit $h \in E$. Par la question précédente, il existe $f \in E$ telle que

    $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h(x) = g(f(x)) = g \circ f(x).$$

    Autrement dit $h = \varphi(f)$. Ainsi, $\forall h \in E$, $\exists f \in E$, $h = \varphi(f)$. Conclusion,

    $$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est surjective.}}$$

13. On suppose $\varphi$ surjective. Montrons que $g$ est surjective. Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $\tilde{y} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & y \end{array}$ est un élément de $E$ : $\tilde{y} \in E$. Or $\varphi$ est surjective sur $E$ donc il existe $f \in E$ tell que

$$\varphi(f) = \tilde{y}.$$

Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(f)(x) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad g \circ f(x) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad g(f(x)) = y.$$

En particulier pour $x = 0$ par exemple, on a $y = g(f(0))$. Donc $f(0) \in \mathbb{R}$ est un antécédent de $y$ par $g$. Donc $y$ admet un antécédent dans $\mathbb{R}$ par $g$. Ceci étant vrai pour $y \in \mathbb{R}$ quelconque, on en déduit que

$$\boxed{g \text{ est surjective.}}$$

14. Montrons que $g$ est injective si et seulement si $\varphi$ est injective. On procède par double implication. Montrons que $g$ injective implique $\varphi$ injective.

    Supposons $g$ injective. Montrons que $\varphi$ est injective. Soit $(f_1, f_2) \in E^2$ tel que $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$. Autrement dit,

    $$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(f_1)(x) = \varphi(f_2)(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ g(f_1(x)) = g(f_2(x)).$$

    Or $g$ est injective. Donc

    $$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = f_2(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad f_1 = f_2.$$

    Ceci démontre bien que $\varphi$ est injective. Donc

    $$g \text{ injective} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi \text{ injective.}$$

    Réciproquement, montrons que $\varphi$ injective implique $g$ injective. Supposons $\varphi$ injective. Montrons que $g$ est injective. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(a) = g(b)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

    $$\varphi(\tilde{a})(x) = g(\tilde{a}(x)) = g(a) = g(b) = g\left(\tilde{b}(x)\right) = \varphi\left(\tilde{b}\right)(x).$$

    Donc

    $$\varphi(\tilde{a}) = \varphi\left(\tilde{b}\right).$$

    Or $\varphi$ est injective donc

    $$\tilde{a} = \tilde{b}.$$

    Ou encore pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{a}(x) = \tilde{b}(x)$ i.e. $a = b$. Ceci démontre bien que $g$ est injective. D'où

    $$\varphi \text{ injective} \qquad \Rightarrow \qquad g \text{ injective.}$$

    Conclusion,

    $$_b oxedg \text{ injective} \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi \text{ injective.}$$

15. Par la question 13. on a $\varphi$ surjective $\Rightarrow$ $g$ surjective et par la question 12. on a réciproquement, $g$ surjective $\Rightarrow$ $\varphi$ surjective. Donc

    $$g \text{ surjective} \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi \text{ surjective.}$$

    Donc par la question précédente, on obtient,

    $$\begin{aligned} g \text{ bijective} \qquad &\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} g \text{ injective} \\ g \text{ surjective} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \varphi \text{ injective} \\ \varphi \text{ surjective} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \qquad \varphi \text{ bijective.} \end{aligned}$$

    Conclusion,

    $$\boxed{g \text{ bijective} \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi \text{ bijective.}}$$

De plus dans ce cas, $g^{-1}$ existe. Posons alors,

$$\psi : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & g^{-1} \circ f. \end{array}$$

Alors pour tout $f \in E$,

$$\varphi \circ \psi(f) = \varphi\left(g^{-1} \circ f\right) = g \circ g^{-1} \circ f = f.$$

De même,

$$\psi \circ \varphi(f) = \psi\left(g \circ f\right) = g^{-1} \circ g \circ f = f.$$

Ceci étant vrai pour tout $f \in E$,

$$\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E.$$

On retrouve donc que dans ce cas $\varphi$ est bijective et de plus,

$$\boxed{\varphi^{-1} = \psi : f \mapsto g^{-1} \circ f.}$$

# Problème II - Continuité, dérivabilité

On considère la fonction $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in ]0;1], \quad g(x) = x\ln(x).$$

On considère également $h : [-1;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \sqrt{|x|}g\left(|x|\right)$$

## Partie 1 : Etude de $g$ et $h$

1. La fonction $g$ est continue sur $]0;1]$ comme produit de deux fonctions continues sur $]0;1]$. De plus par croissance comparée, on a
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0 = g(0).$$
Donc $g$ est continue en 0. Conclusion,
$$g \text{ est continue sur } [0;1].$$
Par composée de $x \mapsto |x|$ continue sur $[-1;1]$ et à valeurs dans $[0;1]$ et $g$ continue sur $[0;1]$, on en déduit que $x \mapsto g\left(|x|\right)$ est continue sur $[-1;1]$. De même $x \mapsto \sqrt{|x|}$ est continue sur $[-1;1]$ et par produit
$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est continue sur } [-1;1].}$$

2. La fonction $g$ est continue sur $[0;1]$. Par composée, $|g|$ est **continue** sur le **segment** $[0;1]$. Donc par le théorème des bornes atteintes, la fonction $|g|$ est bornée et atteint ses bornes sur $[0;1]$. En particulier,
$$\boxed{\sup_{x\in[0;1]} |g(x)| \text{ existe et est même un maximum.}}$$

3. La fonction $g$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;1]$ comme produit de fonctions $\mathscr{C}^1$. Donc par produit et composées, la fonction $h$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1;0[\cup]0;1]$. De plus,
$$\forall x > 0, \quad h(x) = \sqrt{x}x\ln(x) = x^{3/2}\ln(x)$$
$$\forall x < 0, \quad h(x) = (-x)^{3/2}\ln\left(-x\right).$$
Donc,
$$\forall x > 0, \quad h'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}\ln(x) + \sqrt{x}$$
$$\forall x < 0, \quad h'(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{-x}\ln(-x) - \sqrt{-x}$$
A nouveau par croissance comparée, on a
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h'(x) = 0 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} h'(x).$$
Dès lors, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} h'(x)$ existe. Ainsi,
   - la fonction $h$ est continue sur $[-1;1]$ (par la question 1.),
   - la fonction $h$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1;1] \setminus \{0\}$,

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} h'(x)$ existe et vaut 0.

Donc d'après le théorème de prolongement de fonction de classe $\mathscr{C}^1$, on en déduit que $h$ est $\mathscr{C}^1$ en 0 (et $h'(0)=0$).

$$\boxed{h \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [-1;1].}$$

4. D'après le cours une fonction admet un développement d'ordre 1 en 0 si et seulement si cette fonction est dérivable en 0. Or $h$ est $\mathscr{C}^1$ en 0 et est donc dérivable en 0. De plus $h(0)=h'(0)=0$. Donc $\boxed{h \text{ admet un développement limité en 0 à l'ordre 1 et}}$

$$\boxed{h(x) \underset{x\to 0}{=} 0+0x+o(x)=o(x).}$$

5. Montrons que $h'$ n'est pas dérivable en 0 et que donc $h$ n'est pas deux fois dérivable en 0. On a vu que $h'(0)=0$. Donc pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{h'(x)-h'(0)}{x-0}=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}\ln(x)+\sqrt{x}}{x}=\frac{3\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}.$$

Par quotient de limite ($3\ln(x)+2\to-\infty$ et $\sqrt{x}\to 0^+$), on en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{3\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}=-\infty.$$

Donc $h'$ n'est pas dérivable en 0 et donc

$$\boxed{h \text{ n'est pas deux fois dérivable en 0.}}$$

6. Soit $\mathscr{D}'$ le domaine de dérivabilité de $g$. La fonction $g$ est le produit de fonctions dérivables sur $]0;1]$ et est donc dérivable sur $]0;1]$ : $]0;1]\subseteq\mathscr{D}'$. Montrons que $g$ n'est pas dérivable en 0. Pour tout $x>0$, on a

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{x\ln(x)}{x}=\ln(x).$$

D'où

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=-\infty.$$

Donc $g$ possède une tangente verticale en 0 et n'est pas dérivable en 0.

Conclusion :

$$\boxed{\text{le domaine de dérivabilité de } g \text{ est } \mathscr{D}'=]0;1].}$$

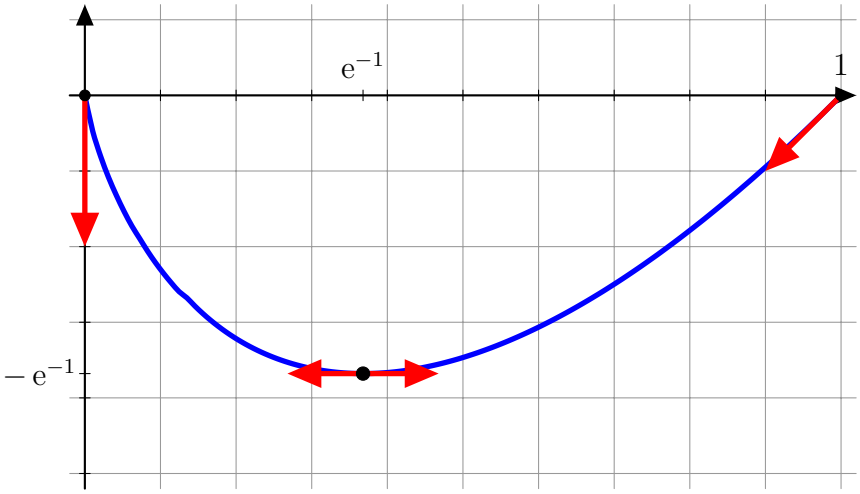
7. On a pour tout $x\in]0;1]$, $g'(x)=\ln(x)+1$ qui est une fonction strictement croissante sur $]0;1]$ étant la somme d'une fonction strictement croissante et d'une fonction constante. De plus pour $x\in]0;1]$,

$$g'(x)\geqslant 0 \qquad\Leftrightarrow\qquad \ln(x)\geqslant -1 \qquad\Leftrightarrow\qquad x\geqslant \mathrm{e}^{-1}.$$

Donc $g$ est strictement décroissante sur $\left]0;\mathrm{e}^{-1}\right]$ et par continuité de $g$ en 0, sur $\left[0;;\mathrm{e}^{-1}\right]$. Et $g$ est strictement croissante sur $\left[\mathrm{e}^{-1};1\right]$. Enfin $g\left(\mathrm{e}^{-1}\right)=-\mathrm{e}^{-1}$. On en déduit donc le tableau suivant :

| $x$ | $0$ | | $\mathrm{e}^{-1}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | $\Vert$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |
| $g(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | $0$ | $\searrow$ | $-\mathrm{e}^{-1}$ | $\nearrow$ | $0$ |

En déduit le graphe de $g$ suivant avec une tangente verticale en 0 et en 1 une tangente de pente 1.




8. D'après la question précédente, la fonction $g'$ est croissante strictement sur $\left[\mathrm{e}^{-3/2};\mathrm{e}^{-1}\right]$. Par conséquent, pour tout $x \in \left[\mathrm{e}^{-3/2};\mathrm{e}^{-1}\right]$, $g'\left(\mathrm{e}^{-3/2}\right) \leqslant g'(x) \leqslant g'\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = 0$. Donc en passant aux valeurs absolues, $|g(x)| \leqslant \left|g'\left(\mathrm{e}^{-3/2}\right)\right| = \left|-\frac{3}{2}+1\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$. Ce majorant est bien un maximum car il est atteint pour $x = \mathrm{e}^{-3/2}$. D'où,

$$\boxed{M = \sup_{x\in\left[\mathrm{e}^{-3/2};\mathrm{e}^{-1}\right]} |g'(x)| = \frac{1}{2}.}$$

## Partie 2 : Etude d'une suite récurrente

On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $t_0 \in \left[\mathrm{e}^{-3/2};\mathrm{e}^{-1}\right]$ et pour tout entier naturel $n$

$$t_{n+1} = -g\left(t_n\right).$$

9. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$ ». Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

   - *Initialisation.* Si $n = 0$, alors par définition $\mathrm{e}^{-3/2} \leqslant t_0 \leqslant \mathrm{e}^{-1}$. Donc par décroissance de $g$ sur $\left[0;\mathrm{e}^{-1}\right]$, on en déduit que $g\left(t_0\right) \geqslant g\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = -\mathrm{e}^{-1}$ et donc $t_1 = -g\left(t_0\right) \leqslant \mathrm{e}^{-1}$. De plus on a les

équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} t_0 \leqslant t_1 \quad &\Leftrightarrow \quad t_0 \leqslant -g(t_0) = -t_0 \ln(t_0) \\ &\Leftrightarrow \quad t_0 (1 + \ln(t_0)) \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 + \ln(t_0) \leqslant 0 \qquad \text{car } t_0 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(t_0) \leqslant -1 \\ &\Leftrightarrow \quad t_0 \leqslant \mathrm{e}^{-1}. \end{aligned}$$

La dernière assertion étant vraie par hypothèse, on en déduit que $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \mathrm{e}^{-1}$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors $0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$. Par croissance de la fonction $-g$ sur $\left[0; \mathrm{e}^{-1}\right]$, on en déduit que

$$-g(0) \leqslant -g(t_n) \leqslant -g(t_{n+1}) \leqslant -g\left(\mathrm{e}^{-1}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant t_{n+1} \leqslant t_{n+2} \leqslant \mathrm{e}^{-1}.$$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie.
- *Conclusion.* On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie et notamment

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^{-1}.}$$

10. D'après la question précédente, la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\mathrm{e}^{-1}$. Par le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{\text{la suite } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers un réel } l.}$$

11. On a $t_0 \in \left[\mathrm{e}^{-3/2}; \mathrm{e}^{-1}\right]$ et la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\mathrm{e}^{-1}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad t_n \in \left[\mathrm{e}^{-3/2}; \mathrm{e}^{-1}\right].$$

Donc par passage à la limite, $l \in \left[\mathrm{e}^{-3/2}; \mathrm{e}^{-1}\right]$ (intervalle fermé quand on passe à la limite !!).

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t_{n+1} = -g(t_n)$. La suite $(t_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l$ et la fonction $-g$ est continue sur $\left[0; \mathrm{e}^{-1}\right]$ donc par la caractérisation séquentielle de la continuité,

$$l = \lim_{n\to+\infty} t_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} -g(t_n) = -g\left(\lim_{n\to+\infty} t_n\right) = -g(l).$$

Or $l \neq 0$. Donc $-l\ln(l) = l$ puis

$$-\ln(l) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{l = \mathrm{e}^{-1}}.$$

12. Soit $x \in \left[\mathrm{e}^{-3/2}; \mathrm{e}^{-1}\right[$. La fonction $g$ est

- continue sur $\left[x; \mathrm{e}^{-1}\right]$,
- dérivable sur $\left]x; \mathrm{e}^{-1}\right[$.

Donc par l'identité des accroissements finis, il existe $t \in \left]x; \mathrm{e}^{-1}\right[$ tel que

$$\frac{g(x) - g\left(\mathrm{e}^{-1}\right)}{x - \mathrm{e}^{-1}} = g'(t).$$

D'où

$$\left|g(x) - g\left(\mathrm{e}^{-1}\right)\right| \leqslant \left|g'(t)\right| \left|x - \mathrm{e}^{-1}\right| \leqslant \sup_{t\in\left[\mathrm{e}^{-3/2};\mathrm{e}^{-1}\right]} \left|g'(t)\right| \left|x - \mathrm{e}^{-1}\right|.$$

Donc d'après la question 8.

$$\left|g(x) - g\left(\mathrm{e}^{-1}\right)\right| \leqslant \frac{\left|x - \mathrm{e}^{-1}\right|}{2},$$

ce qui est encore vrai si $x = \mathrm{e}^{-1}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left[\mathrm{e}^{-3/2}; \mathrm{e}^{-1}\right], \qquad \left|g(x) - g\left(\mathrm{e}^{-1}\right)\right| \leqslant \frac{\left|x - \mathrm{e}^{-1}\right|}{2}.}$$

13. D'après la question (9.), la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et croissante et l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{e}^{-3/2} \leqslant t_0 \leqslant t_n \leqslant \mathrm{e}^{-1}.$$

Autrement dit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n \in \left[\mathrm{e}^{-3/2}; \mathrm{e}^{-1}\right]$. Donc par la question précédente,

$$\left|t_{n+1} - \mathrm{e}^{-1}\right| = \left|-g\left(t_n\right) + g\left(\mathrm{e}^{-1}\right)\right| = \left|g\left(t_n\right) - g\left(\mathrm{e}^{-1}\right)\right| \leqslant \frac{\left|t_n - \mathrm{e}^{-1}\right|}{2}.$$

Ainsi,

$$\left|t_{n+1} - \mathrm{e}^{-1}\right| \leqslant \frac{\left|t_n - \mathrm{e}^{-1}\right|}{2} \leqslant \frac{\left|t_{n-1} - \mathrm{e}^{-1}\right|}{2^2} \leqslant \frac{\left|t_{n-2} - \mathrm{e}^{-1}\right|}{2^3}.$$

Et par récurrence on trouve

$$\left|t_{n+1} - \mathrm{e}^{-1}\right| \leqslant \frac{\left|t_0 - \mathrm{e}^{-1}\right|}{2^{n+1}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|t_n - \mathrm{e}^{-1}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|t_0 - \mathrm{e}^{-1}\right|.}$$

14. Par passage à la limite dans la question précédente, on obtient,

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} \left|t_n - \mathrm{e}^{-1}\right| \leqslant 0.$$

Donc par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|t_n - \mathrm{e}^{-1}\right| = 0$ autrement dit on retrouve la limite de la suite :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} t_n = \mathrm{e}^{-1}.}$$

# Problème III - Analyse Asymptotique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la FONCTION ITÉRÉE $n^{\text{IÈME}}$ de l' arctangente, que l'on note $\arctan^{[n]}$, par :

$$\arctan^{[n]} = \underbrace{\arctan \circ \arctan \circ \cdots \circ \arctan}_{n \text{ fois}}$$

où $\circ$ désigne la composition entre fonctions.

## Partie 1 : L'itérée première

Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. On sait que
$$\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k u^k + o\left(u^p\right).$$
Donc en posant $u = x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on obtient que
$$\boxed{\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k x^{2k} + o\left(x^{2p}\right).}$$

2. La fonction arctan est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, qui d'après la question précédente admet un développement limité à l'ordre $2p$. Donc par le théorème de primitivation des développements limités, on a
$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \arctan(0) + \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2p+1}\right).$$
Or $\arctan(0) = 0$. Conclusion, on retrouve la formule bien connue du cours,
$$\boxed{\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2p+1}\right).}$$

3. A l'ordre 5, on a $\arctan(u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + o\left(u^5\right)$. Donc en posant $u = 2x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$,
$$\arctan(2x) \underset{x\to 0}{=} 2x - \frac{8x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$
Dès lors,
$$\frac{1}{\arctan(2x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2x - \frac{8x^3}{3} + o\left(x^3\right)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2x} \frac{1}{1 - \frac{4x^2}{3} + o\left(x^2\right)}.$$
Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{4x^2}{3} + o\left(x^2\right)$. Alors
   - $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$
   - Et
$$o\left(u(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right).$$
Or $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + o(u)$. Donc
$$\begin{aligned}\frac{1}{\arctan(2x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2x}\left(1 - u(x) + o\left(u(x)\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2x}\left(1 + \frac{4x^2}{3} + o\left(x^2\right) + o\left(x^2\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2x} + \frac{2x}{3} + o(x).\end{aligned}$$

De la même façon, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{sh}(2x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2x+\frac{8x^3}{6}+o\left(x^3\right)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2x}\frac{1}{1+\frac{2x^2}{3}+o\left(x^2\right)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2x}\left(1-\frac{2x^2}{3}+o\left(x^2\right)+o\left(x^2\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2x}-\frac{x}{3}+o\left(x\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\operatorname{sh}(2x)}-\frac{1}{\arctan(2x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2x}-\frac{x}{3}+o\left(x\right)-\frac{1}{2x}-\frac{2x}{3}+o\left(x\right) \underset{x\to 0}{=} -x+o\left(x\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{1}{\operatorname{sh}(2x)}-\frac{1}{\arctan(2x)} \underset{x\to 0}{\sim} -x.}$$

4. On considère la fonction

$$f : x \mapsto x^{3/2}\sqrt{\frac{\pi}{2}-\arctan(x+1)}.$$

Pour tout $u>0$, on sait que $\arctan(u)+\arctan\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{\pi}{2}$. Donc pour tout $x>0$,

$$f(x)=x^{3/2}\sqrt{\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)}=x^{3/2}\sqrt{\arctan\left(\frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)}.$$

Or $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2+o\left(u^2\right)$. Posons $u(x)=\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors,

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Alors

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \arctan\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right).$$

Posons $u(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Comme $u(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, alors $u(x)^3 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$ i.e.

$$u(x)^3 \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

- Enfin,

$$o\left(u(x)^3\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Or $\arctan(u) \underset{u\to 0}{=} u-\frac{u^3}{3}+o\left(u^3\right)$. Donc

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)-\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} x^{3/2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)^{1/2} \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{1/2} \end{aligned}$$

Posons $v(x) \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Alors,

- $v(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- De plus, comme $v(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x}$, alors $u(x)^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ i.e.

$$u(x)^2 \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

- Enfin,

$$o\left(u(x)^2\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or

$$(1+v)^{1/2} \underset{v\to0}{=} 1+\frac{v}{2}+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}v^2+o\left(v^2\right) \underset{v\to0}{=} 1+\frac{v}{2}-\frac{v^2}{8}+o\left(v^2\right).$$

D'où

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{1/2} \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{7}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x-\frac{1}{2}+\frac{7}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet une asymptote d'équation } y=x-\frac{1}{2}.}$$

De plus $f(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{7}{8x}$. Or pour tout $x>0$, $\frac{7}{8x}>0$ et deux équivalents ont même signe au voisinage considéré. Donc

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ est au-dessus de son asymptote au voisinage de } +\infty.}$$

## Partie 2 : L'itérée deuxième

5. On sait que $\arctan(x) \underset{x\to0}{=} x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o\left(x^5\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to0}{=} \arctan(x)$. Alors, on a

- $u(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to0}{=} \left(x-\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{x^5}{5}+o\left(x^5\right)\right)\left(x-\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{x^5}{5}+o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to0}{=} x^2 \quad -\tfrac{x^4}{3} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\quad -\tfrac{x^4}{3} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\qquad\qquad +o\left(x^5\right) \\ &\underset{x\to0}{=} x^2-\tfrac{2x^4}{3}+o\left(x^5\right) \end{aligned}$$

- Puis,

$$\begin{aligned} u(x)^3 &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)\left(x^2 - \tfrac{2x^4}{3} + o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^3 \quad -\tfrac{2x^5}{3} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\quad -\tfrac{x^5}{3} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\qquad\qquad +o\left(x^5\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^3 - x^5 + o\left(x^5\right) \end{aligned}$$

- Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on en déduit que $u(x)^5 \underset{x\to 0}{\sim} x^5$ et donc

$$u(x)^5 \underset{x\to 0}{=} x^5 + o\left(x^5\right).$$

- Enfin,

$$o\left(u(x)^5\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \arctan^{[2]}(x) &\underset{x\to 0}{=} u(x) - \tfrac{u(x)}{3} + \tfrac{u(x)^5}{5} + o\left(u(x)^5\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x \quad -\tfrac{x^3}{3} \quad +\tfrac{x^5}{5} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\quad -\tfrac{x^3}{3} \quad +\tfrac{x^5}{3} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\qquad\qquad +\tfrac{x^5}{5} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +o\left(x^5\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x - \tfrac{2x^3}{3} + \tfrac{(3+5+3)x^5}{15} + o\left(x^5\right) \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\arctan^{[2]}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{2x^3}{3} + \frac{11x^5}{15} + o\left(x^5\right).}$$

6. Pour tout $x \neq 0$, $\arctan(x) > 0$ et donc $\arctan^{[2]}(x) = \arctan\left(\arctan(x)\right) > 0$. Ainsi, pour $x > 0$, $\frac{\arctan^{[2]}(x)}{x} > 0$. De même, pour $x < 0$, on a $\arctan^{[2]}(x) < 0$ et donc $\frac{\arctan^{[2]}(x)}{x} > 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g(x) = \mathrm{e}^{\frac{\cos(x)}{x}\ln\left(\frac{\arctan^{[2]}(x)}{x}\right)}.$$

Par la question précédente,

$$\ln\left(\frac{\arctan^{[2]}(x)}{x}\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} \ln\left(\frac{x - \frac{2x^3}{3} + \frac{11x^5}{15} + o\left(x^5\right)}{x}\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} \ln\left(1 - \frac{2x^2}{3} + o\left(x^3\right)\right).$$

Posons $u(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} -\frac{2x^2}{3} + o\left(x^3\right)$. Alors

- $u(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,

$$u(x)^2 \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} o\left(x^3\right).$$

- A fortiori, $o\left(u(x)^2\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} o\left(x^3\right)$.

Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$. Dès lors,

$$\ln\left(\frac{\arctan^{[2]}(x)}{x}\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} -\frac{2x^2}{3} + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} -\frac{2x^2}{3} + o\left(x^3\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x)}{x}\ln\left(\frac{\arctan^{[2]}(x)}{x}\right) &\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} \frac{1}{x}\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\left(-\frac{2x^2}{3}+o\left(x^3\right)\right)\\ &\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} \left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\left(-\frac{2x}{3}+o\left(x^2\right)\right)\\ &\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} -\frac{2x}{3}+o\left(x^2\right).\end{aligned}$$

Posons $v(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} -\frac{2x}{3} + o\left(x^2\right)$. Alors,

- $v(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} 0$.
- De plus, puisque $v(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} -\frac{2x}{3}$ et donc $v(x)^2 \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} \frac{4x^2}{9}$ et donc

$$v(x)^2 \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} \frac{4x^2}{9} + o\left(x^2\right).$$

- Enfin,

$$o\left(v(x)^2\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} o\left(x^2\right).$$

Or $\mathrm{e}^v \underset{v\to 0}{=} 1 + v + \frac{v^2}{2} + o\left(v^2\right)$. D'où,

$$\begin{aligned}g(x) &\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} 1 + v(x) + \frac{v^2(x)}{2} + o\left(v^2(x)\right)\\ &\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} 1 - \frac{2x}{3} + o\left(x^2\right) + \frac{2x^2}{9} + o\left(x^2\right) + o\left(x^2\right)\\ &\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} 1 - \frac{2x}{3} + \frac{2x^2}{9} + o\left(x^2\right).\end{aligned}$$

On remarque alors que $g(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} 1$ i.e.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g(x) = 1.$$

Donc

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } g(0) = 1.}$$

On note $\tilde{g}$ son prolongement. On a

$$\tilde{g}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{2x}{3} + \frac{2x^2}{9} + o\left(x^2\right).$$

Donc $\tilde{g}$ admet développement limité à l'ordre 1 en 0 donc

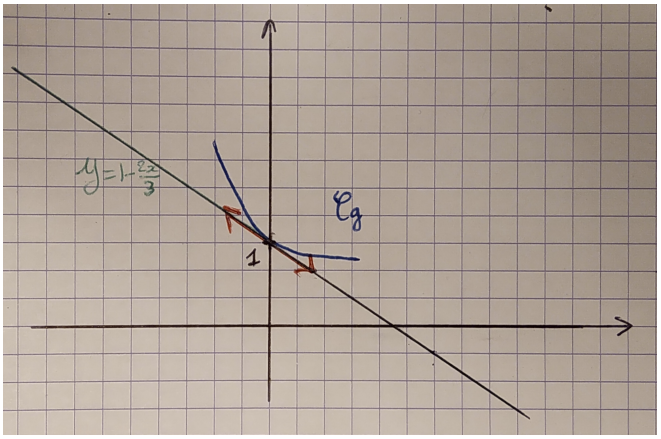
$$\boxed{\tilde{g} \text{ est dérivable en 0 et admet pour tangente en 0 la droite d'équation } y = 1 - \frac{2x}{3}.}$$

Enfin,

$$\tilde{g}(x) - \left(1 - \frac{2x}{3}\right) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{2x^2}{9} \geqslant 0.$$

Or deux équivalents ont même signe au voisinage considéré donc

$$\boxed{\text{la courbe de } \tilde{g} \text{ est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.}}$$




## Partie 3 : L'itérée $n$-ième

7. Procédons par récurrence. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ : « $\arctan^{[n]}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire. »

   *Initialisation.* Si $n = 1$, alors $\arctan^{[1]} = \arctan$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

   *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ i.e. $\arctan^{[n]}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire. Alors, $\arctan^{[n+1]} = \arctan \circ \arctan\,[n]$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

   L'ensemble $\mathbb{R}$ est bien centré en 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\arctan^{[n+1]}(-x) &= \arctan^{[n]} \circ \arctan(-x) \\
&= \arctan^{[n]}(\arctan(-x)) \\
&= \arctan^{[n]}(-\arctan(x)) && \text{car arctan est impaire} \\
&= -\arctan^{[n]}(\arctan(x)) && \text{car par hypothèse de récurrence, } \arctan^{[n]} \text{ est impaire} \\
&= -\arctan^{[n+1]}(x).
\end{aligned}$$

   Donc $\arctan^{[n+1]}$ est impaire et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   *Conclusion,*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \arctan^{[n]} \text{ est bien définie sur } \mathbb{R} \text{ et impaire.}}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. En tant que composée de fonctions $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ la fonction $\arctan^{[n]}$ est $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$. Donc par le théorème de Taylor-Young,

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \arctan^{[n]} \text{ admet un développement limité à l'ordre } k \text{ en 0.}}$$

   De plus, d'après la question précédente, $\arctan^{[n]}$ est impaire et nous regardons le développement en 0 *(important !)* donc

$$\boxed{\text{le développement limité de } \arctan^{[n]} \text{ en 0 n'admet que des puissances impaires.}}$$

Autrement dit

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \exists\,(a_1, a_3, \ldots, a_{2p+1}) \in \mathbb{R}^p, \qquad \arctan^{[n]}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} a_{2k+1}x^{2k+1} + o\left(x^{2p+1}\right).}$$

On admet dans la suite qu'il existe trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\arctan^{[n]}(x) \underset{x\to 0}{=} a_n x + b_n x^3 + c_n x^5 + o\left(x^5\right).$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u(x) = \arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)$. Alors, par la question 5. on a

$$\begin{aligned} u(x) &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ u(x)^3 &\underset{x\to 0}{=} x^3 - x^5 + o\left(x^5\right) \\ u(x)^5 &\underset{x\to 0}{=} x^5 + o\left(x^5\right) \\ o\left(u(x)^5\right) &\underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \arctan^{[n+1]}(x) &= \arctan^{[n]}\left(u(x)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} a_n u(x) + b_n u(x)^3 + c_n u(x)^5 + o\left(u(x)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} a_n x \quad -\tfrac{a_n}{3}x^3 \quad +\tfrac{a_n}{5}x^5 \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\qquad +b_n x^3 \quad -b_n x^5 \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad +c_n x^5 \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +o\left(x^5\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} a_n x + \left(b_n - \frac{a_n}{3}\right)x^3 + \left(\frac{a_n}{5} - b_n + c_n\right)x^5 + o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \arctan^{[n+1]}(x) \underset{x\to 0}{=} a_n x + \left(b_n - \frac{a_n}{3}\right)x^3 + \left(\frac{a_n}{5} - b_n + c_n\right)x^5 + o\left(x^5\right).}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $\arctan^{[n+1]} \underset{x\to 0}{=} a_{n+1}x + b_{n+1}x^3 + c_{n+1}x^5 + o\left(x^5\right)$. Donc par la question précédente,

$$a_{n+1}x + b_{n+1}x^3 + c_{n+1}x^5 + o\left(x^5\right) \underset{x\to 0}{=} a_n x + \left(b_n - \frac{a_n}{3}\right)x^3 + \left(\frac{a_n}{5} - b_n + c_n\right)x^5 + o\left(x^5\right).$$

Conclusion, par unicité du développement limité,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = b_n - \frac{a_n}{3} \\ c_{n+1} = \frac{a_n}{5} - b_n + c_n. \end{cases}}$$

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = a_n$. Donc $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite constante}}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = a_1$. Or $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)$. Donc

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = -\frac{1}{3} \\ c_1 = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = 1.}$$

12. A l'aide des deux questions précédentes, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_{n+1} = b_n - \frac{a_n}{3} = b_n - \frac{1}{3}.$$

Donc $\boxed{(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite arithmétique de raison } r = -\frac{1}{3}}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad b_n = b_1 - \frac{n-1}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{n-1}{3} = -\frac{n}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad b_n = -\frac{n}{3}.}$$

13. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On considère la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k),$$

On reconnaît une somme télescopique donc

$$\boxed{S_n = c_n - c_1 = c_n - \frac{1}{5}.}$$

D'autre part, par la question 10. on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{a_k}{5} - b_k + c_k - c_k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{5} + \frac{k}{3}\right) = \frac{n-1}{5} + \frac{1}{3}\frac{(n-1)\,n}{2} = \frac{n-1}{30}(6+5n).$$

Ainsi,

$$\boxed{S_n = \frac{(5n+6)(n-1)}{30}.}$$

14. Par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$c_n = \frac{1}{5} + S_n = \frac{1}{5} + \frac{(5n+6)(n-1)}{30} = \frac{6+5n^2-5n+6n-6}{30} = \frac{5n^2+n}{30} = \frac{n(5n+1)}{30}.$$

Donc à l'aide des questions précédentes, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \arctan^{[n]}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{n}{3}x^3 + \frac{n(5n+1)}{30}x^5 + o\left(x^5\right).}$$

15. Si $n = 1$, on retrouve bien

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{1\times 6}{30}x^5 + o\left(x^5\right) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right).$$

Si $n = 2$, on retrouve le résultat de la question 5.

$$\arctan^{[2]}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2\times 11}{30}x^5 + o\left(x^5\right) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{2x^3}{3} + \frac{11x^5}{15} + o\left(x^5\right).$$

Conclusion, $\boxed{\text{les résultats sont cohérents.}}$

*Ce qui est plutôt rassurant...*