Epreuve de mathématiques 6
2023-2024

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Suites

Partie 1 : Etude de f

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$.

1. Déterminer le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Préciser $f(1)$ et l'équation de la tangente de f en 0.
3. Déterminer un développement asymptotique de f à l'ordre $o\left(\frac{1}{x}\right)$ de f quand $x \to +\infty$.
4. En déduire le comportement asymptotique de f en $+\infty$ (existence d'asymptote ou non et en cas d'existence position de la courbe de f par rapport à cette asymptote).
5. Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation $f(x) \geqslant x$ et en déduire la position du graphe de f par rapport à la droite $y = x$ sur $\mathbb{R}_+$.
6. Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}_+$. Faire apparaitre sa tangente en 0, son asymptote en $+\infty$ et la droite $y = x$.

Partie 2 : Une suite récurrente

On fixe $u_0 \in]0;1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{1+u_n}$.

7. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et est à valeurs dans $]0;1[$.
8. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
9. En déduire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.
10. Justifier l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant \frac{1}{5}$.
11. On pose $k = \frac{22}{25}$. Montrer que f est k-lipschitzienne sur $\left[0; \frac{1}{5}\right]$.
12. En déduire que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant \frac{k^{n-n_0}}{5}$.
13. En déduire la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Partie 3 : Une suite implicite

14. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x_n) = n$.
15. Déterminer la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
16. Déterminer, si elle existe, la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
17. A l'aide de la question 3. déterminer un développement asymptotique de x_n à l'ordre $o(1)$ quand $n \to +\infty$.
18. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{x_n}$.

Problème 2 - Polynômes

On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par récurrence par $P_1 = X - 1$ et

$$\forall n \geqslant 1, \qquad P_{n+1} = P_n + (n+1)\,X^n\,(X-1)\,.$$

Partie 1 : Cas $n = 2$ et $n = 3$

1. Calculer P_2 et préciser sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer P_3 et préciser sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
3. On note $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Déterminer la factorisation de P_3 dans $\mathbb{C}$ et vérifier que les racines de P_3 appartiennent à $\mathcal{D} \cup \{1\}$.
4. On considère l'équation polynomiale suivante $(E) \quad : \quad P'(X^2) = 2P + 2X + 1$, d'inconnu $P \in \mathbb{R}[X]$.
   (a) Vérifier que P_2 est une solution de (E).
   (b) Déterminer toutes les solutions de (E).

Partie 2 : Déterminer des P_n

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le degré de P_n et α_n son coefficient dominant.
6. Montrer que les P_n possèdent une racine commune que l'on précisera.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in\ ]1; +\infty[$, $P_n(x) > 0$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\,X^k\,(X-1) = P_n - P_1.$$

9. Soit $n \geqslant 1$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)\,X^{k+1} - kX^k\right]$.
10. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$,

$$P_n = nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k.$$

Partie 3 : Multiplicité des racines

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Q_n = (X-1)\,P_n$

11. Simplifier $(X-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$.
12. En déduire l'expression développée de Q_n puis de Q_n'.
13. Déterminer les racines de Q_n' et leurs multiplicités.
14. En déduire que 1 est l'unique racine multiple (de multiplicité strictement plus grande que 1) de Q_n et préciser sa multiplicité.
15. Montrer que P_n ne possède que des racines simples.
16. Combien de racines distinctes (réelles ou complexes) possède P_n ?

Partie 4 : Localisation des racines

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

17. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. Montrer que $\left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right| < n\,|z|^n$.
18. En déduire que P_n n'a pas de racine dont le module est strictement plus grand que 1.
19. Soit $z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$ une racine n-ième de l'unité différente de 1. Montrer que z n'est pas racine de P_n.
20. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 1$ et $|z| = 1$.
    (a) Dessiner $\mathcal{D}_2 = \{\,z' \in \mathbb{C} \mid |z'+1| < 2\,\}$.
    (b) Développer et simplifier $|z+1|^2$.
    (c) En déduire que $z \in \mathcal{D}_2$.
    (d) Montrer que z n'est pas racine de P_n.
21. Déterminer toutes les racines de P_n ayant un module supérieur ou égal à 1.

Problème 3 - Séries

Pour tout $(\alpha, x) \in \mathbb{R}^2$, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n^\alpha} x^n.$$

Partie 1 : Cas $x = 1$

On suppose dans cette partie que $x = 1$.

1. On suppose $\alpha = 0$. Déterminer la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$.
2. On suppose $\alpha < 0$. Déterminer la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$.
3. On suppose $\alpha \in]0;1]$.
    (a) La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ diverge-t-elle grossièrement ?
    (b) Justifier que pour tout $n \geqslant 3$, $u_n \geqslant \frac{1}{n^\alpha}$.
    (c) En déduire la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$.
4. On suppose $\alpha > 2$. Déterminer la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$.
5. On suppose $\alpha \in]1;2]$. On pose $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$.
    (a) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} n^\beta u_n$.
    (b) En déduire que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge.

Partie 2 : Cas $\alpha = 1$

On reprend $x \in \mathbb{R}$ et on suppose dans cette partie que $\alpha = 1$.

6. On suppose que $x > 1$. Déterminer la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$.
7. On suppose que $x \in [0;1[$, montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge.
8. En déduire la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ si $x \in]-1;0]$.

Partie 3 : Etude du cas $\alpha = x = 1$

On suppose dans toute la suite que $\alpha = 1$ et $x = 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

9. Etudier la monotonie de $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur son domaine de définition.
10. Montrer que pour tout $n \geqslant 4$,

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2} + \frac{\ln(2)}{2} \leqslant S_n \leqslant \frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2} + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3}.$$

11. En déduire que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge. Avec quelle question ce résultat est-il cohérent ?
12. Déterminer un équivalent de S_n quand $n \to +\infty$.

Partie 4 : Un développement limité de S_n

Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $v_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k$.

13. Montrer que $(V_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
14. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,

$$V_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}.$$

15. En déduire que $(V_n)_{n\geqslant 2}$ converge. On note ℓ sa limite.
16. Déterminer un développement limité de S_n à l'ordre $o(1)$ quand $n \to +\infty$ en fonction de ℓ.

Partie 5 : Une série alternée

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = (-1)^{n-1}\frac{\ln(n)}{n}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k}$.

On admet que le résultat suivant (cf DM) : il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

17. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} w_n$ converge-t-elle absolument ? Peut-on en déduire la convergence de $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
18. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

19. En déduire que $(T_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et exprimer sa limite en fonction de γ.
20. En déduire que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} w_n$ converge et exprimer sa somme totale en fonction de γ.