Corrigé du Devoir Surveillé 6
Suites, polynômes, séries

Problème I - Suites

Partie 1 : Etude de f

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x+1 > 0$, donc la fonction f est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions polynomiale et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f'(x) = \frac{4x(x+1) - 2x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+2)}{(x+1r)^2}.$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) > 0$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et par continuité de f en 0, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f(0) = 0$ et

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{2x^2}{x} = 2x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Conclusion,

x	0	$+\infty$
f	0	$\nearrow$ $+\infty$

2. On a $f(1) = \frac{2}{2} = 1$. De plus $f(0) = 0$ et f étant dérivable en 0 admet une tangente en 0 d'équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. Or par la question précédente, $f'(0) = 0$. Conclusion,

$$\boxed{f(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad f \text{ admet une tangente en 0 d'équation } y = 0.}$$

3. Pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+1} = 2x \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}.$$

Posons $u = \frac{1}{x}$. On a $u \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$. Donc

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} 2x\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} 2x - 2 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} 2x - 2 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).}$$

4. Par la question précédente, on en déduit que le graphe de f admet en $+\infty$ une asymptote d'équation

$$\boxed{y = 2x - 2.}$$

De plus,

$$f(x) - (2x-2) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x}.$$

Or deux équivalents ont même signe au voisinage considéré. Donc au voisinage de $+\infty$,

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ est au-dessus de son asymptote.}}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) \geqslant x \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{2x^2}{x+1} \geqslant x \\ & \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{OU} \quad \begin{cases} \frac{2x}{x+1} \geqslant 1 \\ x > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{OU} \quad \begin{cases} 2x \geqslant x+1 \\ x > 0 \end{cases} \qquad \text{car } x+1 > 0 \\ & \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{OU} \quad x \geqslant 1. \end{aligned}$$

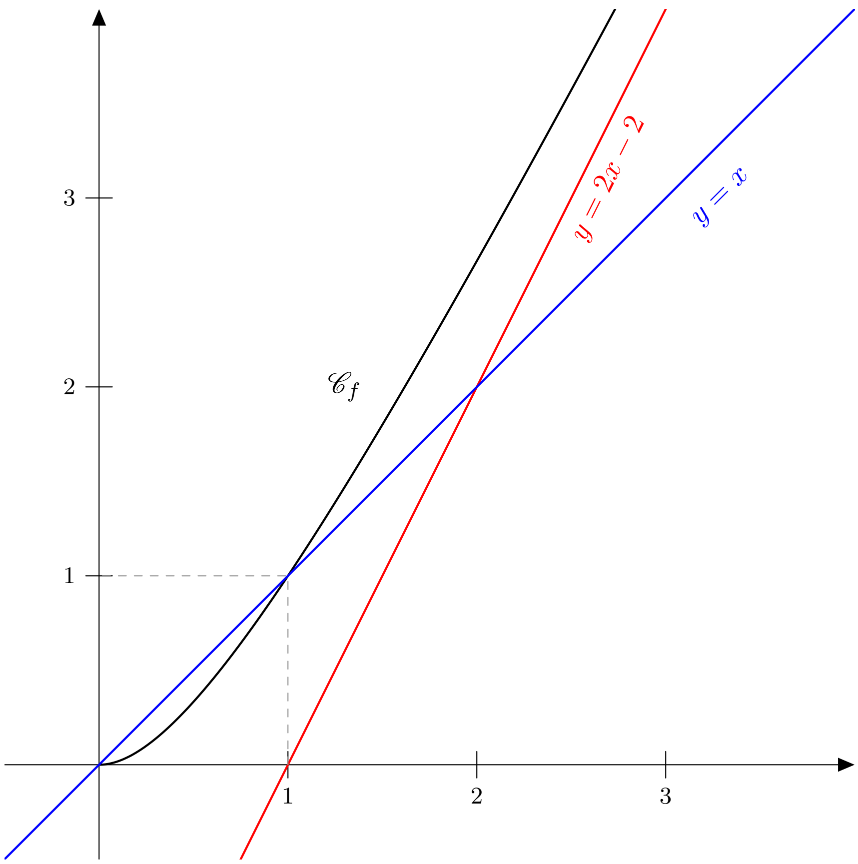
Conclusion,

$$\boxed{f(x) \geqslant x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{OU} \quad x \geqslant 1.}$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ est au-dessus de la droite } y = x \text{ sur } [1; +\infty[\text{ et en dessous sur } [0; 1].}$$

6. On obtient le graphe suivant :



Partie 2 : Une suite récurrente

On fixe $u_0 \in]0;1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{1+u_n}$.

7. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « u_n existe et $u_n \in]0;1[$ ».

   Initialisation. Si $n = 0$ alors par hypothèse, u_0 existe et $u_0 \in]0;1[$.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie : u_n existe et $u_n \in]0;1[$. u_n existe et $u_n > 0$. Donc $u_n + 1 > 0$ et donc $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{1+u_n}$ existe. De plus, on observe que $u_{n+1} = f(u_n)$. Or par la question 1. fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;1]$. Donc par le théorème de la bijection, on a $f(]0;1[) =]f(0); f(1)[=]0;1[$. Comme $u_n \in]0;1[$, on en déduit que
   $$u_{n+1} = f(u_n) \in f(]0;1[) =]0;1[.$$
   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \text{ existe et } u_n \in]0;1[.}$$

8. On a vu précédemment que pour tout $x \in]0;1[$, $f(x) < x$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0;1[$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, en prenant $x = u_n$, on obtient
   $$f(u_n) < u_n \qquad \Leftrightarrow \qquad u_{n+1} < u_n.$$
   Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on conclut que
   $$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$$

9. Par la question précédente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. De plus par la question 7. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. Donc par le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. De plus,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in]0;1[.$$
   Donc par passage à la limite,
   $$\ell \in [0;1].$$
   Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Comme f est continue sur $[0;1]$, f est continue en ℓ. Donc par caractérisation séquentielle de la continuité,
   $$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell).$$
   Or $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (en tant que suite extraite). Conclusion, par passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$,
   $$\ell = f(\ell).$$
   Or comme dans la question 5. pour $x \in \mathbb{R}_+$ on a
   $$f(x) = x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \text{ OU } \frac{2x}{x+1} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \text{ OU } x = 1.$$
   Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_n < u_0.$$
   Donc par passage à la limite,
   $$\ell \leqslant u_0.$$
   Or $u_0 < 1$. Donc $\ell < 1$ et donc $\ell \neq 1$. Conclusion,
   $$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$

10. Par la question précédente, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Or par définition de la limite,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad |u_n - 0| \leqslant \varepsilon\,.$$

Donc en prenant $\varepsilon = \frac{1}{5}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\quad |u_n| \leqslant \frac{1}{5}.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Conclusion,

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\quad u_n \leqslant \frac{1}{5}.}$$

11. On pose $k = \frac{22}{25}$. Soient $(x, y) \in \left[0; \frac{1}{5}\right]^2$, $x \neq y$. La fonction f est dérivable sur $[0; 1]$ donc en particulier :

- f est continue sur $[x; y]$ (ou $[y; x]$),
- f est dérivable sur $]x; y[$ (ou $]y; x[$).

Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists c \in \,]x; y[\,,\quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c).$$

Par la question 1. $f'(c) = \frac{2c(c+2)}{(c+1r)^2}$. Puisque $(x, y) \in \left[0; \frac{1}{5}\right]^2$, alors $c \in \left[0; \frac{1}{5}\right]$. Donc $2c\,(c + 2) \leqslant \frac{2}{5} \times \frac{11}{5} = \frac{22}{25}$. D'autre part, $c + 1 \geqslant 1$ donc $\frac{1}{(c+1)^2} \geqslant 1$. Ainsi par produit (les nombres sont positifs),

$$0 \leqslant f'(c) \leqslant \frac{22}{25} = k.$$

D'où,

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)|\,|x - y| \leqslant k\,|x - y|\,.$$

On remarque que l'inégalité reste vraie si $x = y$. Conclusion,

$$\forall\,(x, y) \in \left[0; \frac{1}{5}\right]^2,\quad |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } \frac{1}{5}\text{-lispchitzienne sur } \left[0; \frac{1}{5}\right].}$$

12. Pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_n \in \left[0; \frac{1}{5}\right]$. Donc par la question précédente en prenant $x = u_n$ et $y = 0$, on obtient

$$|f\,(u_n) - f(0)| \leqslant k\,|u_n - 0| \qquad \Leftrightarrow \qquad |u_{n+1} - 0| \leqslant k\,|u_n| \qquad \Leftrightarrow \qquad u_{n+1} \leqslant k u_n.$$

Or k ne dépend pas de n. Donc par récurrence (que l'on prend soin d'initialiser à n_0),

$$\forall n \geqslant n_0,\quad u_n \leqslant k^{n-n_0} u_{n_0}.$$

Or pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant \frac{1}{5}$, notamment $u_{n_0} \leqslant \frac{1}{5}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0,\quad u_n \leqslant \frac{k^{n-n_0}}{5}.}$$

13. Par la question précédente,

$$\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \underbrace{\frac{1}{5k^{n_0}}}_{\text{constante indépendante de } n} k^n.$$

De plus $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} k^n$ converge en tant que série géométrique de raison $k = \frac{22}{25} \in]-1;1[$. Conclusion, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.}}$$

Partie 3 : Une suite implicite

14. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1. :

- la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$,
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,
- $f(0) = 0 < n$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > n$

Conclusion, par le théorème de la bijection,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists! x_n \in \mathbb{R}_+, \quad f(x_n) = n.}$$

15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n < n+1$. Donc par définition,

$$f(x_n) < f(x_{n+1}).$$

La fonction f étant strictement croissante,

$$x_n < x_{n+1}.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$$

16. Par la question précédente et le théorème de convergence monotone, on en déduit que

- OU la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel fixé ℓ,
- OU la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Supposons le premier cas, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et notons ℓ sa limite. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant 0$, alors par passage à la limite, $\ell \geqslant 0$ i.e. $\ell \in \mathbb{R}_+$. Par continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ et donc en ℓ, on a par caractérisation séquentielle de la continuité,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\ell) \in \mathbb{R}.$$

Or par définition, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = n$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty.$$

Donc $+\infty = f(\ell) \in \mathbb{R}$. Contradiction. Le premier cas étant impossible, le second est vérifié. Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$$

17. Par la question 3. on a
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} 2x-2+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$
Or $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (important à préciser) donc
$$\begin{aligned} f(x_n) \underset{n\to+\infty}{=} 2x_n-2+\frac{2}{x_n}+o\left(\frac{1}{x_n}\right) \quad & \Leftrightarrow \quad n \underset{n\to+\infty}{=} 2x_n-2+o(1) \qquad \text{car } \frac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ & \Leftrightarrow \quad 2x_n \underset{n\to+\infty}{=} n+2+o(1) \\ & \Leftrightarrow \quad x_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{2}+1+o(1). \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{2}+1+o(1).}$$

18. Par la question précédente, $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$. Donc par passage à l'inverse (légal)
$$\frac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$
De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{2}{n}>0$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{2}{n}$ diverge en tant que série harmonique (ou de Riemann d'exposant $\alpha=1$). Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs,
$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{x_n} \text{ diverge.}}$$

Problème II - Polynômes

On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par récurrence par $P_1 = X-1$ et

$$\forall n \geqslant 1, \qquad P_{n+1} = P_n + (n+1)\,X^n\,(X-1)\,.$$

Partie 1 : Cas $n=2$ et $n=3$

1. Par construction,
$$P_2 = P_1 + 2X^1\,(X-1) = X-1+2X\,(X-1)\,.$$
Donc d'une part,
$$P_2 = 2x^2 - X - 1.$$
D'autre part, en factorisant,
$$P_2 = (X-1)\,(1+2X) = 2\left(X+\frac{1}{2}\right)(X-1)\,.$$
Conclusion,
$$\boxed{P_2 = 2X^2 - X - 1 = 2\left(X+\frac{1}{2}\right)(X-1)\,.}$$

2. A l'aide de la question précédente, on a
$$P_3 = P_2 + 3X^2\,(X-1)\,.$$
D'une part,
$$P_3 = 2X^2 - X - 1 + 3X^3 - 3X^2 = 3X^3 - X^2 - X - 1.$$
Ainsi,
$$\boxed{P_3 = 3X^3 - X^2 - X - 1.}$$
D'autre part,
$$P_3 = 2\left(X+\frac{1}{2}\right)(X-1) + 3X^2\,(X-1) = (X-1)\left(2X+1+3X^2\right) = (X-1)\left(3X^2+2X+1\right).$$
Soit Δ le discriminant de $3X^2+2X+1$. On a $\Delta = 4-12 = -8 < 0$. Donc $3X^2+2X+1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Conclusion, la factorisation de P_3 dans $\mathbb{R}[X]$ est donnée par
$$\boxed{P_3 = (X-1)\left(3X^2+2X+1\right).}$$

3. On note $\mathcal{D} = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$. Par la question précédente, le discriminant de $3X^2+2X+1$ vaut $\Delta = -8 \in \mathbb{R}_-$ donc $3X^2+2X+1$ admet deux racines complexes conjuguées données par
$$\frac{-2-2\sqrt{2}i}{6} = -\frac{1+\sqrt{2}i}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{-2+2\sqrt{2}i}{6} = \frac{-1+\sqrt{2}i}{3}.$$
Dès lors, la factorisation de P_3 dans $\mathbb{C}[X]$ est
$$\boxed{P_3 = 3\,(X-1)\left(X+\frac{1+\sqrt{2}i}{3}\right)\left(X+\frac{1-\sqrt{2}i}{3}\right).}$$
Les racines de P_3 sont donc $r_1 = 1$, $r_2 = -\frac{1+\sqrt{2}i}{3}$ et $r_3 = \frac{-1+\sqrt{2}i}{3}$. On a bien $r_1 \in \mathcal{D}\cup\{1\}$. De plus,
$$|r_2| = \frac{\sqrt{1+2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 \qquad \text{et} \qquad |r_3| = \frac{\sqrt{1+2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1.$$
Donc $r_2 \in \mathcal{D}$ et $r_3 \in \mathcal{D}$. Conclusion,
$$\boxed{\text{les racines de } P_3 \text{ sont dans } \mathcal{D}\cup\{1\}.}$$

4. On considère l'équation polynomiale suivante $(E) \quad : \quad P'\left(X^2\right) = 2P + 2X + 1,$
d'inconnu $P \in \mathbb{R}[X]$.

(a) On rappelle que $P_2 = 2X^2 - X - 1$. Donc $P_2' = 4X - 1$ puis $P_2'\left(X^2\right) = 4X^2 - 1$. D'autre part, $2P_2 + 2X + 1 = 4X^2 - 2X - 2 + 2X + 1 = 4X^2 - 1$. Donc on a bien $P_2'\left(X^2\right) = 2P_2 + 2X + 1$. Conclusion,

$$\boxed{P_2 \text{ est bien UNE solution de } (E).}$$

(b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Supposons P solution de (E). Alors,

$$P'\left(X^2\right) = 2P + 2X + 1.$$

Notons $n = \deg(P)$. Premier cas, $n \geqslant 2$. Alors d'une part $\deg(P') = n - 1$ et $\deg\left(P'\left(X^2\right)\right) = 2(n-1) = 2n - 2$. D'autre part, $n > 1$ donc $\deg(2P + X + 1) = \deg(P) = n$. Ainsi,

$$\deg\left(P'\left(X^2\right)\right) = \deg(2P + X + 1) \quad \Leftrightarrow \quad 2n - 2 = n \quad \Leftrightarrow \quad n = 2.$$

Second cas, $n \leqslant 1$. Dans tous les cas, $n \leqslant 2$. Prenons donc maintenant P quelconque dans $\mathbb{R}_2[X]$: il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aX^2 + bX + c$. Dès lors, on obtient les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
P \text{ solution de } (E) \quad & \Leftrightarrow \quad P'\left(X^2\right) = 2P + 2X + 1 \\
& \Leftrightarrow \quad 2a\left(X^2\right) + b = 2aX^2 + 2bX + 2c + 2X + 1 \\
& \Leftrightarrow \quad 2aX^2 + b = 2aX^2 + (2b+2)X + 2c + 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a = 2a \\ 0 = 2b + 2 \\ b = 2c + 1 \end{cases} \qquad \text{par unicité des coefficients d'un polynôme} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -1 \\ c = -1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad P = aX^2 - X - 1.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ aX^2 - X - 1 \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}.}$$

NB : on retrouve bien pour $a = 2$ que $P_2 \in \mathscr{S}_E$.

Partie 2 : Déterminer des P_n

5. Par ce qui précède, on observe que $\deg(P_1) = \alpha_1 = 1$, $\deg(P_2) = \alpha_2 = 2$ et $\deg(P_3) = \alpha_3 = 3$. On intuite donc que $\deg(P_n) = \alpha_n = n$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathscr{P}(n) : \quad \text{« } \deg(P_n) = \alpha_n = n \text{ ».}$$

Initialisation. Si $n = 1$, alors $P_1 = X - 1$. Donc $\deg(P_1) = \alpha_1 = 1$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ i.e. $\deg(P_n) = \alpha_n = n$. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Par construction,

$$P_{n+1} = P_n + (n+1) X^n (X - 1).$$

Or par hypothèse de récurrence, $\deg(P_n) = n < \deg((n+1)X^n(X-1)) = n + 1$. Donc

$$\deg(P_{n+1}) = n + 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha_{n+1} = n + 1.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \deg\left(P_n\right) = \alpha_n = n.}$$

6. On observe que 1 est une racine de P_1, P_2 et P_3. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathscr{P}(n) : \quad \text{« 1 est racine de } P_n \text{ ».}$$

Initialisation. On a $P_1 = X - 1$ donc 1 est une racine de P_1 et donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$: $P_n(1) = 0$. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$. On a

$$P_{n+1} = P_n + (n+1)\, X^n\, (X-1)\,.$$

Donc

$$P_{n+1}(1) = P_n(1) + 0 = 0 \qquad \text{par hypothèse de récurrence.}$$

Donc 1 est racine de P_{n+1} et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \text{ est une racine de } P_n.}$$

7. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathscr{P}(n) : \quad \text{« } \forall x > 1,\ P_n(x) > 0 \text{ ».}$$

Initialisation. On a $P_1 = X - 1$ donc

$$\forall x > 1, \quad P_1(x) = x - 1 > 0.$$

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$: $\forall x > 1$, $P_n(x) > 0$. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Pour tout $x > 1$, on a

$$P_{n+1}(x) = \underbrace{P_n(x)}_{>0} + (n+1)\underbrace{x^n}_{>0}\underbrace{(x-1)}_{>0} > 0.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left]1; +\infty\right[, \quad P_n(x) > 0.}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Par construction,

$$\forall k \in [\![1; n-1]\!], \quad P_{k+1} - P_k = (k+1)\, X^k\, (X-1)\,.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(P_{k+1} - P_k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\, X^k\, (X-1)\,.$$

Or on reconnait une somme télescopique à gauche. Conclusion,

$$\boxed{P_n - P_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\, X^k\, (X-1)\,.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On reconnait à nouveau une somme télescopique. Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1) X^{k+1} - kX^k\right] = nX^n - 0 \times 1 = nX^n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1) X^{k+1} - kX^k\right] = nX^n.}$$

10. Soit $n \geqslant 2$. Par la question 8. on a

$$\begin{aligned} P_n &= P_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) X^k (X-1) \\ &= X - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) X^k (X-1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) X^k (X-1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1) X^{k+1} - (k+1) X^k\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1) X^{k+1} - kX^k\right] - \sum_{k=0}^{n} X^k. \end{aligned}$$

Par la question précédente, on a $P_n = nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. On note que la formule reste encore vraie si $n = 1$ car $P_1 = X - 1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n = nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k.}$$

Partie 3 : Multiplicité des racines

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Q_n = (X-1) P_n$

11. En développant, on obtient

$$(X-1) \sum_{k=0}^{n-1} X^k = \sum_{k=0}^{n-1} X^k (X-1) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[X^{k+1} - X^k\right].$$

On reconnait une somme télescopique, conclusion,

$$\boxed{(X-1) \sum_{k=0}^{n-1} X^k = X^n - 1.}$$

12. Par la question 10.

$$Q_n = (X-1) P_n = (X-1) \left(nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k\right) = nX^{n+1} - nX^n - (X-1) \sum_{k=0}^{n-1} X^k.$$

Par la question précédente,

$$Q_n = nX^{n+1} - nX^n - X^n + 1 = nX^{n+1} - (n+1) X^n + 1.$$

Puis,

$$Q_n' = (n+1)\,nX^n - (n+1)\,nX^{n-1} \qquad \text{car } n \geqslant 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{Q_n = nX^{n+1} - (n+1)\,X^n + 1 \qquad \text{et} \qquad Q_n' = (n+1)\,nX^n - (n+1)\,nX^{n-1}.}$$

13. Par la question précédente, on a $Q_n' = (n+1)\,nX^{n-1}\,(X-1)$. On en déduit directement que

$$\boxed{1 \text{ est une racine simple de } Q_n' \text{ et } 0 \text{ est une racine de multiplicité } n-1 \text{ de } Q_n'.}$$

On note bien que la somme des multiplicités correspond à $n = \deg(Q_n')$.

14. Soit r une racine multiple de Q_n. Alors, r est de multiplicité supérieure ou égale à 2. Donc par caractérisation de la multiplicité par les dérivées, on a $Q_n(r) = Q_n'(r)$. En particulier, r est racine de Q_n'. Donc par la question précédente, $r = 0$ ou $r = 1$. Cependant,

$$Q_n(0) = n0^{n+1} - (n+1)\,0^n + 1 = 1 \qquad \text{car } n \geqslant 1.$$

Donc $Q_n(0) \neq 0$ et 0 n'est pas racine de Q_n. D'autre part,

$$Q_n(1) = n - (n+1) + 1 = 0.$$

Donc $r = 1$ est bien racine. Conclusion,

$$\boxed{1 \text{ est l'unique racine multiple de } Q_n.}$$

Déterminons la multiplicité de 1 dans Q_n. On a $Q_n(1) = Q_n'(1) = 0$. De plus, par la question précédente, 1 est racine simple de Q_n'. Donc $Q_n'(1) = 0$ (ok) et $(Q_n')'(1) \neq 1 \;\Leftrightarrow\; Q_n''(1) \neq 1$. Donc $Q_n(1) = Q_n'(1) = 0$ et $Q_n''(1) \neq 0$. Conclusion,

$$\boxed{1 \text{ est une racine double de } Q_n \text{ i.e. de multiplicité exactement 2 de } Q_n.}$$

15. Montrons que P_n ne possède que des racines simples. Procédons par l'absurde. Soit r une racine multiple de P_n. Alors la multiplicité de r est supérieure ou égale à 2 donc $(X-r)^2$ divise P_n :

$$\exists R_n \in \mathbb{R}[X], \quad P_n = (X-r)^2\,R_n.$$

Donc

$$Q_n = (X-1)\,(X-r)^2\,R_n.$$

Ainsi, $(X-r)^2$ divise Q_n et donc r est une racine multiple de Q_n. Donc par la question précédente, $r = 1$. Or $Q_n = (X-1)\,(X-r)^2\,R_n$ donc

$$Q_n = (X-1)^3\,R_n.$$

Cela implique que r est une racine de multiplicité au moins 3 de Q_n. Or nous avons vu que 1 est racine double de Q_n. Contradiction. Conclusion, P_n ne possède pas de racine multiple :

$$\boxed{P_n \text{ ne possède que des racines simples.}}$$

16. Par le théorème de d'Alembert-Gauss, tout polynôme de degré n admet exactement n racines complexes comptées avec multiplicités. Or par la question précédente, toutes les racines de P_n sont simples et par la question 5. $\deg(P_n) = n$. Conclusion,

$$\boxed{P_n \text{ possède exactement } n \text{ racines (réelles ou complexes) distinctes.}}$$

Partie 4 : Localisation des racines

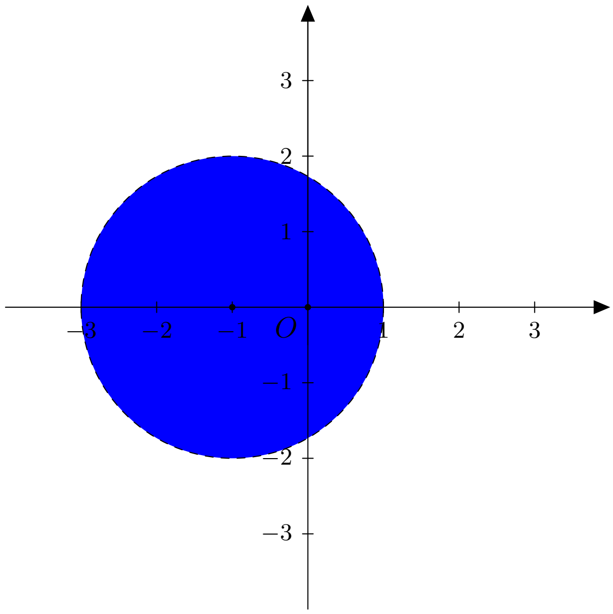
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

17. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. Par l'inégalité triangulaire, on a
$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k .$$
Puisque $|z| > 1$, alors pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $|z|^k \leqslant |z|^{n-1} < |z|^n$. Donc
$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right| < \sum_{k=0}^{n-1} |z|^n = |z|^n \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n\,|z|^n .$$
Conclusion,
$$\boxed{\left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right| < n\,|z|^n .}$$

18. Procédons par l'absurde. Soit $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| > 1$ et z racine de P_n. Alors,
$$P_n(z) = 0.$$
Donc par la question 10.
$$nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad nz^n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \qquad \Rightarrow \qquad n\,|z|^n = \left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right|$$
Donc par la question précédente,
$$n\,|z|^n < n\,|z|^n \qquad \text{contradiction.}$$
Conclusion,
$$\boxed{P_n \text{ n'a pas de racine dont le module est strictement plus grand que 1.}}$$

19. Soit $z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$ une racine n-ième de l'unité différente de 1. Alors, par la question 10.
$$P_n(z) = nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$
Puisque $z \in \mathbb{U}_n$, $z^n = 1$. De plus, $z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$ donc on sait que $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$. Ainsi,
$$P_n(z) = n \neq 0.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}, \quad z \text{ n'est pas racine de } P_n.}$$

20. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 1$ et $|z| = 1$.
   (a) Soit $\mathcal{D}_2 = \{ z' \in \mathbb{C} \mid |z'+1| < 2 \}$. $\mathcal{D}_2$ est l'ensemble des complexes dont la distance à $z_0 = -1$ est strictement inférieure à 2. Donc $\mathcal{D}_2$ est le disque ouvert de centre -1 et de rayon 2 :



(b) Par le cours,

$$|z+1|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\bar{1}\right) + |1|^2 = 1 + 2\mathrm{Re}\,(z) + 1 \qquad \text{car } |z| = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{|z+1|^2 = 2\,(1 + \mathrm{Re}\,(z))\,.}$$

(c) On sait que $|z| = 1$ autrement dit que z est sur le cercle unité $z \in \mathbb{U}$. Donc $-1 \leqslant \mathrm{Re}\,(z) \leqslant 1$. Or $z \neq 1$. Donc nécessairement, $\mathrm{Re}\,(z) < 1$. Ainsi, par la question précédente,

$$|z+1|^2 < 2\,(1+1) = 4 \qquad \Rightarrow \qquad |z+1| < 2, \qquad \text{car } |z+1| \geqslant 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{z \in \mathcal{D}_2.}$$

(d) Procédons par l'absurde et supposons z racine de P_n. Alors par la question 10.

$$P_n(z) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k \qquad \Leftrightarrow \qquad nz^n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

Supposons $n \geqslant 3$. Alors,

$$nz^n = 1 + z + \sum_{k=2}^{n-1} z^k.$$

Donc par l'inégalité triangulaire,

$$n\,|z|^n = \left|1 + z + \sum_{k=2}^{n-1} z^k\right| \leqslant |1+z| + \sum_{k=2}^{n-2} \left|z^k\right| = |1+z| + \sum_{k=2}^{n-1} 1 \qquad \text{car } |z| = 1.$$

Donc

$$n \leqslant |1+z| + n - 2 < 2 + n - 2 = n \qquad \text{par la question précédente.}$$

Donc $n < n$ contradiction. Si $n = 2$, alors

$$2z^2 = 1 + z \qquad \Rightarrow \qquad 2 = \left|2z^2\right| = |1+z| < 2 \qquad \text{par la question précédente.}$$

On retrouve une contradiction. Dernier cas, si $n = 1$, alors

$$z = 1, \qquad \text{ce qui est aussi exclu.}$$

On a donc bien une contradiction dans tous les cas. Conclusion,

$$\boxed{z \text{ n'est pas racine de } P_n.}$$

21. Par les questions précédentes, on a vu que P_n n'a pas de racines dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ ni dans $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid |z| = 1\}$. Enfin, on a vu que 1 est racine simple de P_n. Conclusion,

$$\boxed{P_n \text{ possède une unique racine de module supérieur ou égal à 1 qui est } z = 1.}$$

Et comme P_n possède exactement n racines simples distinctes, il a nécessairement $n-1$ racines localisées dans $\mathcal{D}$.

Problème III - Séries

Pour tout $(\alpha, x) \in \mathbb{R}^2$, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n^\alpha} x^n.$$

Partie 1 : Cas $x = 1$

On suppose dans cette partie que $x = 1$.

1. On suppose $\alpha = 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(n)$. Or $\lim_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$. Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ diverge grossièrement et donc

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \text{ diverge.}}$$

2. On suppose $\alpha < 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(n) n^{-\alpha}$, avec $-\alpha > 0$. Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ diverge grossièrement et donc

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \text{ diverge.}}$$

3. On suppose $\alpha \in]0; 1]$.

   (a) Par croissance comparée, on a

   $$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0.$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \text{ ne diverge pas grossièrement.}}$$

   Cela ne signifie pas naturellement qu'elle converge.

   (b) Pour tout $n \geqslant 3$, on a $n \geqslant \mathrm{e}$. Donc par la croissance de la fonction logarithme, $\ln(n) \geqslant \ln(\mathrm{e}) = 1$. Donc

   $$\frac{\ln(n)}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n^\alpha} \qquad \text{car n} > 0.$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\forall n \geqslant 3, \quad u_n \geqslant \frac{1}{n^\alpha}.}$$

(c) On sait que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha \leqslant 1$. De plus par la question précédente,

$$\forall n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant u_n.$$

N'oubliez pas de préciser la positivité !!!

Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en conclut que

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ diverge.}}$$

4. On suppose $\alpha > 2$. Appliquons la règle du n^2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$n^2 u_n = n^2 \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = \frac{\ln(n)}{n^{\alpha-2}}.$$

Or $\alpha - 2 > 0$. Donc par croissance comparée,

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0.$$

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$n^2 u_n \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad u_n \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \text{car } n > 0.$$

De plus pour tout $n \geqslant 1$, $\ln(n) \geqslant 0$ et $n^\alpha > 0$ donc $u_n \geqslant 0$. Ainsi,

$$\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Enfin $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Conclusion, par le théorème de comparaison,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

5. On suppose $\alpha \in]1;2]$. On pose $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$.

(a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$n^\beta u_n = \frac{\ln(n)}{n^{\alpha-\beta}} = \frac{\ln(n)}{n^{\alpha-\frac{\alpha+1}{2}}} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{\alpha-1}{2}}}.$$

Or $\alpha > 1$ donc $\frac{\alpha-1}{2} > 0$. Donc par croissance comparée,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^\beta u_n = 0.}$$

(b) Par la question précédente, on en déduit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$n^\beta u_n \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad u_n \leqslant \frac{1}{n^\beta} \qquad \text{car } n > 0.$$

De plus, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{\ln(n)}{n^\alpha} \geqslant 0$. Donc

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^\beta}.$$

Enfin, puisque $\alpha > 1$, alors $\beta = \frac{\alpha+1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\beta}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\beta > 1$. Conclusion, par le théorème de comparaison,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

Partie 2 : Cas $\alpha = 1$

On reprend $x \in \mathbb{R}$ et on suppose dans cette partie que $\alpha = 1$.

6. On suppose que $x > 1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\ln(n)}{n} x^n$. Or par croissance comparée, puisque $x > 1$, on a
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n} = +\infty.$$
Donc
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$
Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ diverge grossièrement. Conclusion,
$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \text{ diverge.}}$$

7. On suppose que $x \in [0; 1[$. Montrons que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$n^2 u_n = n \ln(n) x^n.$$
Or par croissance comparée, puisque $x \in [0; 1[$, on a
$$\lim_{n \to +\infty} n^2 u_n = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Or $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2} > 0$. Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,
$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

8. Soit $x \in]-1; 0]$. Posons $u = |x|$. Alors $u \in [0; 1[$. Donc par la question précédente,
$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n} u^n \text{ converge.}$$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{\ln(n)}{n} u^n = \frac{\ln(n)}{n} |x|^n = \left| \frac{\ln(n)}{n} x^n \right| = |u_n| \qquad \text{car } \ln(n) \geqslant 0 \text{ et } n > 0 \text{ car } n \geqslant 1.$$
Ainsi, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |u_n|$ converge autrement dit $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la converge. Conclusion,
$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

Partie 3 : Etude du cas $\alpha = x = 1$

On suppose dans toute la suite que $\alpha = 1$ et $x = 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

9. Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$. La fonction f est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

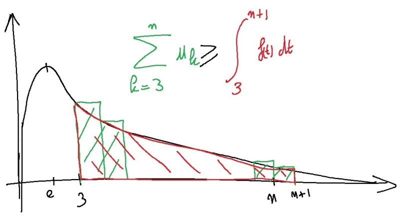
Dès lors,

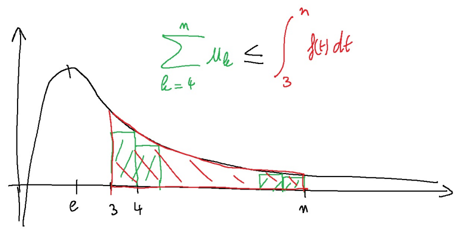
$$\forall x > 0, \quad f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > \ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad x < \mathrm{e}.$$

Conclusion, on obtient le tableau de variations suivant :

x	0	e	$+\infty$
f	||	$\nearrow$	$\searrow$

10. Par la question précédente, on obtient que f est strictement décroissante sur $]\mathrm{e}; +\infty[$ et donc notamment sur $[3; +\infty[$. De plus f est **continue** sur $[3; +\infty[$. Donc par le théorème de comparaison série-intégrale (un dessin !)





Pour tout $n \geqslant 3$,

$$\sum_{k=3}^{n} u_k = \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{k=3}^{n} f(k) \geqslant \int_3^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc

$$S_n = 0 + \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=3}^{n} u_k \geqslant \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On reconnait dans l'intégrale du $u'u$ donc

$$S_n \geqslant \frac{\ln(2)}{2} + \left[\frac{\ln^2(t)}{2}\right]_{t=3}^{t=n+1} = \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2} + \frac{\ln(2)}{2}.$$

D'autre part, on a pour tout $n \geqslant 4$,

$$\sum_{k=4}^{n} u_k \leqslant \int_3^{n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\ln(2)}{2}+\frac{\ln(3)}{3}+\sum_{k=4}^{n} u_k \\ &\leqslant \frac{\ln(2)}{2}+\frac{\ln(3)}{3}+\int_3^n \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\ln(2)}{2}+\frac{\ln(3)}{3}+\frac{\ln^2(n)}{2}-\frac{\ln^2(3)}{2} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant 4, \qquad \frac{\ln^2(n+1)}{2}-\frac{\ln^2(3)}{2}+\frac{\ln(2)}{2} \leqslant S_n \leqslant \frac{\ln^2(n)}{2}-\frac{\ln^2(3)}{2}+\frac{\ln(2)}{2}+\frac{\ln(3)}{3}.}$$

11. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{2}=+\infty$, par la question précédente et le théorème de minoration pour les suites, on en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} S_n=+\infty.$$
En particulier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge. Autrement dit,
$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ diverge.}}$$
Nous sommes dans le cas où $x=1$ et $\alpha=1\in]0;1]$ donc
$$\boxed{\text{nous avions déjà établi cette divergence à la question 3.c}}$$

12. Pour tout $n>0$, on a
$$\frac{\ln^2(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2.$$
Or $\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. Donc par élévation au carré,
$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}.$$
Puisque $-\frac{\ln^2(3)}{2}+\frac{\ln(2)}{2}n \underset{\ll}{\to} +\infty\frac{\ln^2(n)}{2}$, on en déduit que
$$\frac{\ln^2(n+1)}{2}-\frac{\ln^2(3)}{2}+\frac{\ln(2)}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}.$$
De même,
$$\frac{\ln^2(n)}{2}-\frac{\ln^2(3)}{2}+\frac{\ln(2)}{2}+\frac{\ln(3)}{3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}.$$
Donc par la question 10. et le théorème d'encadrement des équivalents, on en déduit que
$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}.}$$

Partie 4 : Un développement limité de S_n

Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $v_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k$.

13. Soit $n \geqslant 3$. On a
$$V_{n+1} - V_n = v_{n+1} = \int_{n}^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$
Or par la question 9. la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est décroissante sur $[\mathrm{e}; +\infty[$ donc sur $[3; +\infty[$ et donc sur $[n; n+1]$. Donc pour tout $t \in [n; n+1]$,
$$f(t) \geqslant f(n+1) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\ln(t)}{t} \geqslant \frac{\ln(n+1)}{n+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(t)}{t} \leqslant 0.$$
Donc par croissance de l'intégrale (car les bornes sont dans le bon sens),
$$\int_{n}^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant 0.$$
Autrement dit, $V_{n+1} - V_n \leqslant 0$. Ceci étant vrai pour tout $n \geqslant 3$, on conclut que
$$\boxed{\text{la suite } (V_n)_{n\geqslant 3} \text{ est décroissante.}}$$

14. Soit $n \geqslant 2$. On a par définition,
$$\begin{aligned}
V_n &= \sum_{k=2}^{n} v_k \\
&= \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=2}^{n} \left(\int_{k-1}^{k} \frac{\ln(k)}{k}\,\mathrm{d}t - \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= S_n - \frac{\ln(1)}{1} - \int_{1}^{n} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{par la relation de Chasles} \\
&= S_n - \left[\frac{\ln^2(t)}{2} \right]_{t=1}^{t=n} \\
&= S_n - \frac{\ln^2(n)}{2} + 0.
\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad V_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}.}$$

15. Par la question précédente, pour tout $n \geqslant 2$, $V_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}$. Donc par la minoration obtenue à la

question 10. on a, pour tout $n \geqslant 4$,

$$\begin{aligned} V_n &\geqslant \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2} + \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} \\ &= \frac{\left(\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2} + \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} \\ &= \frac{\ln^2(n) + 2\ln(n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2} + \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} \\ &= \frac{2\ln(n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2} + \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

Or pour tout $n \geqslant 4$, $\ln(n) > 0$, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$. Donc

$$V_n \geqslant -\frac{\ln^2(3)}{2} + \frac{\ln(2)}{2}.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \geqslant 4$, on en déduit que $(V_n)_{n\geqslant 4}$ est minorée. Or par la question 13. $(V_n)_{n\geqslant 4}$ est décroissante. Donc par le théorème de convergence monotone, $(V_n)_{n\geqslant 4}$ converge. Les premiers termes ne changeant pas la nature d'une suite, on en conclut que

$$\boxed{\text{la suite } (V_n)_{n\geqslant 2} \text{ converge.}}$$

On note ℓ sa limite.

16. On sait que $\lim_{n\to+\infty} V_n = \ell$. Autrement dit,

$$V_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o(1).$$

Donc par la question 14.

$$S_n - \frac{\ln^2(n)}{2} \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o(1) \qquad \Leftrightarrow \qquad S_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln^2(n)}{2} + \ell + o(1).$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln^2(n)}{2} + \ell + o(1).}$$

Partie 5 : Une série alternée

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = (-1)^{n-1}\frac{\ln(n)}{n}$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k}$.

On admet le résultat suivant (cf DM) : il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

17. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|w_n| = \left|(-1)^{n-1}\frac{\ln(n)}{n}\right| = \frac{\ln(n)}{n} \qquad \text{car } n \geqslant 1.$$

Or par la question 11. ou 3.c $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\ln(n)}{n}$ diverge. Donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |w_n| \text{ diverge.}$$

Autrement dit,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} w_n \text{ ne converge pas absolument.}}$$

La convergence absolue implique la convergence mais la réciproque n'est pas forcément vraie. Donc

$$\boxed{\text{on ne peut pas en déduire directement la convergence de } (T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}.}$$

18. Procédons par récurrence. Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n) : \quad \text{« } T_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \text{ ».}$$

Initialisation. Si $n = 1$. Alors,

$$T_{2n} = T_2 = \sum_{k=1}^{2}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} = 0 - \frac{\ln(2)}{2}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &= S_2 - S_1 - \ln(2)\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k} \\ &= \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(1)}{1} - \frac{\ln(1)}{1} - \ln(2) \\ &= -\frac{\ln(2)}{2}). \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$. Alors,

$$T_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Ensuite, par définition,

$$T_{2(n+1)} = T_{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n+2} w_k = w_{2n+2} + w_{2n+1} + T_{2n}.$$

Donc par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
T_{2n+2} &= (-1)^{2n+2-1}\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + (-1)^{2n+1-1}\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\
&= -\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\
&= -\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + S_{2n+2} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \\
&\qquad - \left(S_{n+1} - \frac{\ln(n+1)}{n+1}\right) - \ln(2)\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= -2\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + S_{2n+2} - S_{n+1} + \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \ln(2)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{\ln(2)}{n+1} \\
&= -\frac{\ln(2(n+1))}{n+1} + S_{2n+2} - S_{n+1} + \frac{\ln(n+1)+\ln(2)}{n+1} - \ln(2)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} \\
&= -\frac{\ln(2)+\ln(n+1)}{n+1} + S_{2n+2} - S_{n+1} + \frac{\ln(n+1)+\ln(2)}{n+1} - \ln(2)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} \\
&= S_{2n+2} - S_{n+1} - \ln(2)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie !

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.}$$

19. Par la question 16., $S_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln^2(n)}{2} + \ell + o(1)$. Or $2n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc on a aussi

$$S_{2n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln^2(2n)}{2} + \ell + o(1).$$

Or par la question précédente, $T_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et on sait que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
T_{2n} &= \frac{\ln^2(2n)}{2} + \ell + o(1) - \left(\frac{\ln^2(n)}{2} + \ell + o(1)\right) - \ln(2)\left(\ln(n) + \gamma + o(1)\right) \\
&= \frac{(\ln(n)+\ln(2))^2}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2} - \ln(2)\ln(n) - \ln(2)\gamma + o(1) \\
&= \frac{\ln^2(n) + 2\ln(n)\ln(2) + \ln^2(2) - \ln^2(n) - 2\ln(2)\ln(n)}{2} - \ln(2)\gamma + o(1) \\
&= \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\gamma + o(1).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{(T_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et } \quad \lim_{n\to+\infty} T_{2n} = \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\gamma.}$$

20. Montrons que $(T_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} w_k = w_{2n+1} + T_{2n} = \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} + T_{2n}.$$

Or par croissance comparée, $\frac{\ln(u)}{u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = 0.$$

Donc par la question précédente,

$$\lim_{n\to+\infty} T_{2n+1} = 0 + \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\gamma.$$

Donc $(T_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\gamma$. Donc $(T_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et vers la même limite. Donc par une propriété du cours (réciproque sur la convergence des suites extraites), on en déduit que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et sa limite est $\frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\gamma$. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} w_n \text{ converge et } \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} w_k = \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\gamma.}$$