Commentaires du DS7
Algèbre linéaire (espaces vectoriels, dimension, applications linéaires) et dénombrement

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{65}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1.1	P1.2	P1.3	P1.4	P1.5	P1.6	P1	P2	Total	Note finale
Moyenne	-1,3	4,9	2,6	9,1	1,2	2,1	0,8	20,6	1,2	20,5	8,1
Sur		14	13	24	12	20	10	93	23	116	20

TOTAL : 128 pt

Problème I - Applications linéaires 93 pt

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.
L'objectif de ce problème est de déterminer *les racines carrées* de f i.e. de trouver les endomorphismes g de E tels que $g^2 = g \circ g = f$.

Partie 1 : Généralités 14 pt

Soit E un espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $g \in \mathscr{L}(E)$ une racine carrée de f : $g^2 = g \circ g = f$.

1. **1 pt** Quelles sont les racines carrées de Id_E ?

   Aucune bonne réponse. C'est simplement du cours si s est un endomorphisme et vérifie $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ alors s est une symétrie... Plusieurs ont parachuté que seulement Id_E et $-\mathrm{Id}_E$ fonctionnaient.

2. **2 pt** Montrer que $\mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

   Identique à l'exo3 du TD. Pourtant seule une moitié de la classe résout la question.

3. **2 pt** Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$.

   Même remarque. La définition de l'ensemble image n'est pas systématiquement assimilée.

4. **3 pt** Montrer que $f \in \mathrm{GL}(E) \Leftrightarrow g \in \mathrm{GL}(E)$.

   L'implication réciproque était facile mais plusieurs ont redémontré le résultat de cours suivant : $\mathrm{GL}(E)$ est stable par combinaison. Inutile de le redémontrer. Quelques-uns ont forcé le résultat.

5. **2 pt** Montrer que f et g commutent : $f \circ g = g \circ f$.

   Très facile et pourtant pas toujours traitée.

6. **2 pt** On suppose dans cette question que E de dimension finie. Montrer que

   $$\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f).$$

   Bien entendu, le théorème du rang était derrière. Quelques belles réponses.

7. **2 pt** Montrer que $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(g) = g(\mathrm{Ker}(f))$.

   Question plus dure. Une ou deux bonnes réponses.

Partie 2 : Un exemple dans $\mathbb{R}^2$ 13 pt

On fixe dans cette partie $E = \mathbb{R}^2$.
Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f_\theta(x, y) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

8. **2 pt** Montrer que f_θ est un endomorphisme de E.
   Grand classique ! A savoir absolument. Quelques confusions peut-être à cause de θ. Pour la linéarité, en plus de (λ, μ) il ne suffit pas de prendre (x, y) deux réels. Il faut bien prendre $u = (x, y)$ et $v(x', y')$ deux **vecteurs** de $E = \mathbb{R}^2$.

9. **2 pt** Montrer que f_θ est un automorphisme de E.
   Par le noyau ou l'image + la caractérisation en dimension finie des isomorphismes. Certains le voient bien mais forcent la résolution du noyau. Dire
   $$\begin{cases} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) = 0 \\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = y = 0$$
   est du parachutage ! ! ! Il n'est pas clair que cela marche pour θ quelconque. En particulier, on ne peut pas diviser par $\cos(\theta)$ par exemple si $\theta = \frac{\pi}{2}$.

10. Soient $\theta' \in \mathbb{R}$.
    (a) **1 pt** Justifier que $f_\theta \circ f_{\theta'}$ est un automorphisme de E.
    Là aussi, il suffit de parler de la stabilité de $\mathrm{GL}(E)$ par composition. Quelques bonnes réponses.
    (b) **2 pt** Montrer que $f_\theta \circ f_{\theta'} = f_{\theta+\theta'}$.
    Ok, globalement bien traitée.

11. **1,5 pt** Déduire de la question précédente f_θ^{-1}.
    Pas très dure. Plusieurs bonnes réponses.

12. **1,5 pt** Déduire également de la question 10. une racine carrée de f_θ.
    Identique.

13. **2 pt** Montrer que f_π est une symétrie et préciser ses éléments caractéristiques (par rapport à quel ensemble et parallèlement à quel ensemble).
    Une seule bonne réponse il me semble. Dommage, la question n'est pas dure.

14. **1 pt** Préciser une racine carrée de f_π.
    Ok, n'hésitez pas à préciser qui est $f_{\pi/2}$.

Partie 3 : Un exemple dans $\mathbb{R}^3$. 24 pt

On fixe dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$ que l'on identifie à $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On pose $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on définit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & AX. \end{array}$$

15. **2 pt** Montrer que φ est un endomorphisme de E.
    Facile ! ! Tout le monde aurait dû la résoudre. Vous n'êtes pas obligés de faire le calcul matriciel car on sait que $A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY$ et ce quelque soit A matrice et X, Y vecteurs de bonnes tailles.

16. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer l'image de φ, en préciser une base.
    Facile et identique au TD. Pas réussie pour tout le monde.

17. $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Déterminer le rang de φ.
    Bien. J'ai quand même croisé des horreurs telles que $\dim(f)$ ou $\dim(\mathscr{B}_I)$.

18. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer un supplémentaire à $\mathrm{Im}(\varphi)$.
    Assez classique. Plusieurs bonnes réponses. Des confusions cependant sur le théorème de la base adaptée en mélangeant les différentes hypothèses.

19. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Calculer $\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)$ puis en déduire le noyau de φ, en préciser une base.
    Le calcul de $\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)$ mais après beaucoup parachutent gratuitement le noyau ! Un petit raisonnement est nécessaire.

20. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ sont-ils supplémentaires dans E ?
    Même remarque que pour la question 18.

Posons $\varphi_1 = \varphi - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et $\varphi_4 = \varphi - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

21. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer une base du noyau de φ_1 et une base du noyau de φ_4.
    Sans difficulté. Pas si souvent résolue.

22. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ On pose $e_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.
    Encore une question facile. N'oubliez pas de penser à la dimension, à la place ou de la liberté ou du caractère générateur.

23. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ On pose $G = \mathrm{Ker}(\varphi_1) + \mathrm{Ker}(\varphi_4)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et G sont supplémentaires dans E.
    Quelques bonnes réponses.

24. $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Calculer $\varphi(\mathscr{B})$.
    Facile. Certains ont bloqué sur la définition de $\varphi(\mathscr{B})$.

25. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Préciser si φ est injective, surjective et/ou bijective.
    Facile. Vous êtes passés par le noyau et l'image, cela marchait très bien. On pouvait aussi invoquer la caractérisation des isomorphismes en dimension finie pour obtenir la (non)surjectivité à partir de la non(injectivité) (ou l'inverse).

Soit ψ un endomorphisme de E tel que $\psi^2 = \varphi$. On admet qu'alors il existe $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $i \in [\![1;3]\!]$, $\psi(e_i) = \mu_i e_i$.

26. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer les différentes valeurs possibles pour μ_1, μ_2, μ_3.
    Une petite poignée de belles réponses.

27. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire que φ admet au plus 4 racines carrées.
    Non résolue.

Partie 4 : Racines carrées de 0 $\boxed{12 \text{ pt}}$

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On note $r = \text{rg}(g)$.

28. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que $\text{Im}(g) \subseteq \text{Ker}(g)$.
    Sans grosse difficulté mais peu traitée.

29. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que $\text{rg}(g) \leqslant \frac{n}{2}$.
    Une ou deux bonnes réponses.

30. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Soit F un supplémentaire de $\text{Ker}(g)$. Justifier que $\dim(F) = r$.
    Idem

31. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Soit $\mathscr{B}_F = (e_1, \ldots, e_r)$ une base de F. Montrer que $g(\mathscr{B}_F) = (g(e_1), \ldots, g(e_r))$ est libre.
    Non traitée.

32. $\boxed{2 \text{ pt}}$ De quel espace $g(\mathscr{B}_F)$ est-ce une base ? Le démontrer.
    Non traitée.

33. $\boxed{2 \text{ pt}}$ On suppose que $n = 2r$. Montrer que $(g(e_1), \ldots, g(e_r), e_1, \ldots, e_r)$ est une base de E.
    Non traitée.

Partie 5 : Un contre-exemple dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ $\boxed{20 \text{ pt}}$

On pose $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère l'application suivante :

$$F : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -a+b-c+d & -a-b+c+d \\ 0 & -2a+2d \end{pmatrix} \end{array}.$$

On admet que $F \in \mathscr{L}(E)$.

34. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer une base du noyau de F.
    Sans difficulté. Quelques bonnes réponses.

35. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer une base de l'image de F. Vérifier la cohérence des dimensions.
    Idem.

36. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que si $\mathscr{B}_I$ est une base *quelconque* de $\text{Im}(F)$, alors $F(\mathscr{B}_I)$ est une famille génératrice de $\text{Im}\left(F^2\right)$.
    Non traitée.

37. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déduire des deux questions précédentes $\text{Im}\left(F^2\right)$.
    Non traitée

38. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire que $F^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
    Non traitée.

La suite n'a pas été traitée.
Soient G une racine carrée de F et $\mathscr{N} = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid G^k = 0_{\mathscr{L}(E)} \right\}$.

39. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que $\mathscr{N}$ admet un minimum. On note $p = \min(\mathscr{N})$.

40. **2 pt** Justifier qu'il existe $a \in E$ tel que $G^{p-1}(a) \neq 0_E$.

41. **2 pt** Montrer que $\left(a, G(a), \ldots, G^{p-1}(a)\right)$ est libre.

    On pourra composer par G^{p-1}.

42. **2 pt** En déduire que $p \leqslant 4$ puis que $G^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

43. **2 pt** Conclure que F n'admet aucune racine carrée.

Partie 6 : Un contre-exemple dans $\mathbb{R}[X]$ **10 pt**

On pose $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère l'application suivante :

$$D : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P'. \end{array}$$

On admet que $D \in \mathscr{L}(E)$ et on suppose que $T \in \mathscr{L}(E)$ est une racine carrée de D : $T^2 = D$.

44. **2 pt** Préciser $\operatorname{Ker}(D)$ et sa dimension.

    Facile mais pas toujours traitée ni bien résolue. Certains confondent $\mathbb{R}_0[X]$ et $\mathbb{R}_1[X]$. LA polynôme nul n'a pas besoin d'être traité à part, il est lui aussi un polynôme constant.

45. **2 pt** Montrer que T n'est pas injective.

    Plusieurs erreurs, la question est plus dure.

46. **2 pt** En déduire que $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Ker}(D)$.

    Non réussie.

47. **2 pt** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Ker}(T^n) = \operatorname{Ker}(T)$.

    Non réussie.

48. **2 pt** Conclure à une contradiction.

    Non traitée.

Problème II - Dénombrement **23 pt**

Problème traitée par seulement deux étudiants qui ont pu engrangé quelques points rapidement grâce aux premières questions assez accessibles (1 et 2). Le reste n'a pas été abordée.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E = [\![1;n]\!]$. On appelle partition ordonnée de E, une famille $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ de $p \in [\![1;n]\!]$ sous-ensembles de E vérifiant

- $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $A_i \neq \emptyset$ et $A_i \in \mathscr{P}(E)$ i.e. $A_i \subseteq E$,
- $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]$, $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$,
- $\displaystyle\bigcup_{i \in [\![1;p]\!]} A_i = E$,

pour laquelle l'ordre d'apparition des A_i dans la famille est important (exemple : $(\{1\}, \{2,3\})$ et $(\{2,3\}, \{1\})$ sont deux partitions ordonnées distinctes).

On note u_n le nombre de partitions ordonnées de E et pour tout $p \in [\![1;n]\!]$, $u_{n,p}$ le nombre de partitions ordonnées de E avec exactement p sous-ensembles de E.

1. (a) **1 pt** Montrer que $u_1 = 1$.

(b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Si $n = 2$, énumérer les partitions ordonnées de E et vérifier que $u_2 = 3$.

(c) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Si $n = 3$, énumérer les partitions ordonnées de E et vérifier que $u_3 = 13$.

2. $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Calculer $u_{n,1}$ le nombre de partitions ordonnées de $E = [\![1; n]\!]$ ayant exactement 1 seul sous-ensemble de E.

3. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Calculer $u_{n,n}$ le nombre de partitions ordonnées de $E = [\![1; n]\!]$ ayant exactement n sous-ensembles de E.

4. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Soit $n \geqslant 3$. Calculer $u_{n,n-1}$ le nombre de partitions ordonnées de $E = [\![1; n]\!]$ ayant exactement $n - 1$ sous-ensembles de E.

5. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Justifier que construire une partition ordonnée avec exactement deux sous-ensembles de E revient à prendre un élément de $\mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}$.

6. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire $u_{n,2}$.

7. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Soit $p \in [\![2; n]\!]$. Montrer que

$$u_{n,p} = \sum_{k=1}^{n-p+1} \binom{n}{k} u_{n-k,p-1}.$$

On pourra utiliser v_k le nombre de partitions ordonnées de E dont le premier sous-ensemble A_1 de la partition de E contient exactement k éléments.

8. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Retrouver alors le résultat de la question 6.

9. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déduire de la question 7. que

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} u_k.$$

10. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Retrouver alors le résultat de la question 1.c puis calculer u_4.