Epreuve de Mathématiques

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

NB : les questions marquées d'une * sont les questions modifiées ou ajoutées par rapport au sujet initial

Problème 1 - Analyse (d'après banque PT 2018)

Partie 1 : Préambule

On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et une fonction f, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$.

1. Montrer qu'il existe une constante positive M telle que, pour tout réel t de $[a;b]$:
$$|f'(t)| \leqslant M.$$
2. Que vaut $\displaystyle\lim_{k\to+\infty, k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t$?
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty, k\in\mathbb{N}} \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t = 0$.

Partie 2 : intégrale de Dirichlet

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose
$$I_n = \int_\pi^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

4.* Justifier que pour tout $n \geqslant 1$, I_n et u_n existent.

5. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,
$$I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{1}{\pi} - \int_\pi^{n\pi} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
6. A l'aide d'une majoration de u_n, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.
7. En déduire que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite en fonction de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Dans ce qui suit, a désigne un réel strictement positif.

8. Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}a^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$ est absolument convergente.
9. Soit
$$\psi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \psi(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$
Montrer que ψ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que ψ admet un développement limité à l'ordre $2n$ en 0 que l'on précisera.

11.* En déduire que $\displaystyle\int_0^x \psi(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{(2k+1)\,(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$.

On admet dans la suite que
$$\int_0^a \psi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, a^{2k+1}}{(2k+1)\,(2k+1)!}.$$

Dans ce qui suit, la partie réel d'un nombre complexe z sera notée $\mathcal{R}e(z)$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n(t) = \frac{(-1)^n a^n}{n!}\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)$.

12. Définir la série exponentielle complexe et rappeler son domaine de convergence et sa somme totale.
13.* Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n(t)$ converge.

On admet que $\forall N \in \mathbb{N}$, $V_N : t \mapsto \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n(t)$ et $V : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

14.* Montrer que $\mathcal{R}e\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t$.
15. Montrer que, pour tout entier naturel N :

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\pi}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

16.* Montrer également que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\mathrm{d}t$ converge.
17.* Déduire des deux questions précédentes que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\mathrm{d}t$$

18. Calculer pour $p = 0$: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-ipt}\right)\mathrm{d}t$, puis pour tout entier naturel non nul n : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\mathrm{d}t$. *(On pensera à distinguer les cas, en fonction de la parité de n).*
19. En déduire une expression de de la partie réelle de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\,dt$ en fonction de la somme totale d'une série.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x\cos(t)}\,\mathrm{d}t.$$

20.* Montrer que la fonction exponentielle est 1-lipschitzienne sur $]-\infty; 0]$.
21.* En déduire que F est $\frac{\pi}{2}$-lispchitzienne sur $[0; +\infty[$.
22.* En déduire que F est continue sur $[0; +\infty[$.
23. Déterminer le sens de variation de la fonction $h : \begin{array}{ccc} \left[0; \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{-a\cos(t)} \end{array}$.
24. Montrer que pour tout $a \geqslant 1$, $\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\cos(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}}$.
25. En déduire la valeur $\lim_{a\to+\infty} F(a)$.
26. Déterminer, pour tout réel t de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ la partie réelle, la partie imaginaire et le module de $\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}$.
27. Montrer que pour $a \geqslant 1$, $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant F(a)$ et en déduire $\lim_{a\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right)\mathrm{d}t$.
28. En déduire, à l'aide des résultats précédents, la valeur de :

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^a \psi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Problème 2 - Algèbre (d'après banque PT 2019)

n et p étant deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note A^T la transposée de la matrice A. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on note $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite antisymétrique si $A^T = -A$. On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Partie 1 : Cours

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que toute matrice $A \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ est de la forme
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$
avec α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une base de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))$.

Partie 2 : Lien entre matrice antisymétrique et matrice orthogonale

On se fixe dans cette partie un entier naturel n non nul et une matrice $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Montrer que pour toute matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et toute matrice carrée B d'ordre n, on a :
$$X^T B X = X^T B^T X.$$
En déduire que $X^T A X = 0$.
5. Soit une matrice colonne X telle que $(A+I)X = 0$. En calculant $X^T(A+I)X$ de deux manières différentes, montrer que $X = 0$.
6.* Montrer que l'application φ définie pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par $\varphi(X) = (A+I)X$ est un automorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On admet que $A + I$ est inversible.

7. Montrer que la matrice $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ est inversible et que $B^{-1} = B^T$.
8. Calculer $(I+B)(I+A)$. En déduire que $I+B$ est inversible.
9. Réciproquement, soit B une matrice inversible telle que $B^{-1} = B^T$ et telle que $I+B$ soit inversible. On considère la matrice $C = (I+B)^{-1}(I-B)$. Montrer que l'on a
$$C = I - B - BC$$
puis que
$$C^T = I - B^{-1} - C^T B^{-1}$$
et enfin que la matrice C est antisymétrique.

Partie 3 : Autour de l'endomorphisme associé

On se fixe dans cette partie un entier naturel non nul n et une matrice $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. On confond $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$ et on note

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ X & \mapsto & AX. \end{array}$$

On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

10. Soient $X \in \mathbb{R}^n$ et $Y = AX$. On suppose que $AY = 0$. Montrer que $Y^T Y = 0$.
11. Montrer que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f)$.
12.* Soit $p = \operatorname{rg}(f)$. En déduire qu'il existe $(e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une base de $\mathbb{R}^n$ telle que
    (i) $\forall i \in [\![1;p]\!],\ f(e_i) \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots e_p)$,
    (ii) $\forall i \in [\![p+1;n]\!],\ f(e_i) = 0$.
13.* Soit g la restriction de f, définie sur $\operatorname{Im}(f)$ et à valeurs dans $\operatorname{Im}(f)$:

$$g : \begin{array}{ccc} \operatorname{Im}(f) & \to & \operatorname{Im}(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

    Montrer que g est bien définie sur $\operatorname{Im}(f)$ à valeurs dans $\operatorname{Im}(f)$ et que g est un automorphisme de $\operatorname{Im}(f)$.
14.* Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On suppose $X \neq 0$ et on note $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$ le vecteur composé des nombres complexes conjugués des coordonnées du vecteur X. Montrer que $\overline{X}^T X$ est un réel strictement positif.
15. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f(X) = AX = \lambda X$. En calculant de deux façons différentes $\overline{X}^T AX$, montrer que λ est imaginaire pur.