Commentaires du DS8 - CCB
Analyse - Algèbre

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{65}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1.1	P1.2	P1	P2.1	P2.2	P2.3	P2	Total	Note finale
Moyenne	-0,8	1,2	3,4	4,6	3,2	2,8	1,2	7,3	11,4	8,56
Sur		6	50	56	6	19	14	39	95	20

TOTAL : 95 pt

Des extraits de rapport du jury sont insérés aux questions concernées.

Problème I - Analyse (d'après banque PT 2018) 56 pt

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques C

Remarques générales

Le sujet portait cette année sur le calcul de l'intégrale de Dirichlet. Il comportait un certain nombre de questions de cours, et des questions faciles, ce qui a permis aux candidats de répondre à un nombre important de questions.
A côté, d'autres questions étaient destinées à valoriser les candidats soigneux et rigoureux ; d'autres, plus difficiles, à départager les très bons candidats.

Nous souhaitons attirer l'attention des candidats sur le maniement des valeurs absolues, qui est souvent incorrect ou approximatif. L'utilité des valeurs absolues ne semble pas claire pour beaucoup, elles sont omises alors que c'est nécessaire, ou misesun peu au hasard dans les calculs.

D'autre part, il y a de plus en plus d'erreurs d'≪ écriture mathématique ≫ : on voit trop souvent des intégrales qui n'ont pas d'élément différentiel, ou encore des limites (quand l'entier n tend vers l'infini par exemple) qui dépendent de n.

Enfin, l'utilisation inutile des raisonnements par récurrence est trop fréquente.

Les copies ne sont pas toutes bien présentées. Les correcteurs ont noté une nette dégradation de la présentation. Rares sont les copies correctement écrites. Au contraire, elles sont en général malpropres, raturées, écrites avec un stylo à bille qui bave, ou qui est à bout de course, donnant une écriture d'une pâleur extrême qui rend la correction quasiment impossible. Les lignes ne sont pas toujours respectées. Les lettres ne sont pas formées, la lecture devient extrêmement pénible, au point de se demander ce que le candidat veut dire.

Quant à l'orthographe ... Celle de la terminologie mathématique usuelle n'est pas toujours maîtrisée. Voici quelques échantillons trouvés dans les copies :

≪ un segement ≫ ;

≪ on concidère ≫ ;

≪ le théorème des agroissement fini (sans aucun ≪ s ≫) ≫ ;

≪ le théorème de Rholle ≫ ;

au choix : ≪ la règle de d'Alember, d'Allembert, d'Albert ≫ ;

≪ le therme ≫ ;

≪ anule ≫ ;

« un interval » (pluriel : « des intervals »).

Tout ce qui tourne autour du verbe finir a été l'occasion de fautes multiples :

« le théorème des accroisements finit » ;

« le rayon de convergence est infinie » ;

« un intervalle finis » ; « la fonction admet des limites finit ».

Enfin, même le verbe être n'est pas épargné. Citons :

« ... sur sont intervalle de convergence » » ;

« c'est deux fonctions sont continues ».

Comme l'an passé, nous souhaitons faire quelques rappels de bon sens :

i. Il faut produire un raisonnement : recopier le résultat de la question n'est pas une preuve Si le résultat attendu est donné dans l'énoncé, il faut prêter une attention particulière à la rédaction de la solution.

ii. Certains candidats manquent d'honnêteté intellectuelle en essayant de tromper le correcteur, effectuant un calcul manifestement faux mais en concluant avoir répondu. Par exemple, en partie II, question 1.a., avec des démonstrations par récurrence fausses.

Partie 1 : Préambule 6 pt

On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et une fonction f, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a; b]$.

1. 2 pt Montrer qu'il existe une constante positive M telle que, pour tout réel t de $[a; b]$:

$$|f'(t)| \leqslant M.$$

Plusieurs bonnes réponses mais pas assez à mon goût vu le nombre de fois que nous avons croisé cette question auparavant. Certains sont partis sur le théorème des accroissements finis.

Peu de candidats ont justifié qu'une fonction continue sur un segment y est bornée. Les correcteurs ont trouvé dans les copies beaucoup de justifications fantaisistes, faisant appel au théorème des accroissements finis, au théorème de Rolle, disant que la fonction est lipschitzienne, ou, encore, un recopiage de l'énoncé, sans aucune justification à la clé.
Parmi le petit nombre de candidats ne parlant pas d'accroissements finis, les théorèmes parlent de fonction continue sur un intervalle ou sur un fermé. Le mot « segment » ou « fermé borné » est très peu présent.

Beaucoup de candidats omettent les valeurs absolues, et se contentent d'écrire une majoration de $|f'(t)|$.

Le rapport voulait sans doute dire f'(t) ??

2. 2 pt Que vaut $\displaystyle\lim_{k\to+\infty, k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t$?

Très très peu de bonnes réponses. A bien retravailler, la résolution n'est pas très dure et à savoir. Je rappelle que $|\mathrm{e}^z| = 1$ SI $z \in i\mathbb{R}$... Cela pouvait être utile...

Peu de candidats ont répondu correctement à cette question. Dans de très nombreuses copies, on trouve des inégalités mettant en jeu des nombres complexes ... D'autre part, peu de candidats semblent savoir que $|e^{ikt}| = 1$.

3. 2 pt A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty, k\in\mathbb{N}} \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t = 0$.

C'est l'exercice 6 de révision des vacances de printemps ! Mais le remplacement du sinus par l'exponentielle complexe en a laissé plus d'un sur le carreau. Là encore je rappelle qu'une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{zx}$ est $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{zx}}{z}$ pour tout paramètre $z \in \mathbb{C}^*$. Il serait bon de réviser les complexes probablement.

Si une majorité de candidats a traité correctement cette question. Toutefois, l'intégration par parties ne semble absolument pas maîtrisée par certains candidats. De même, le crochet converge vers 0 sans aucune preuve très souvent. On lit aussi « e^{ikt} est borné », sans précision sur le fait que l'on considère $k \mapsto e^{ikt}$ et non $t \mapsto e^{ikt}$.

Partie 2 : intégrale de Dirichlet

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$I_n = \int_{\pi}^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

4.* $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Justifier que pour tout $n \geqslant 1$, I_n et u_n existent.

Vous êtes nombreux à bien parler de continuité mais la justification manque souvent de clarté. Je précise que $\frac{\sin(t)}{t}$ ne peut pas être continue puisque c'est un nombre. On ne le confond plus avec $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$. De plus cette dernière fonction n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car certainement pas en 0.

5. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,

$$I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{n\pi} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Une petite intégration par parties. Aucune difficulté. Quelques bonnes réponses. N'oubliez pas de bien rédiger et de ne pas dire « soient u et v deux fonctions $\mathscr{C}^1$ ». Le caractère $\mathscr{C}^1$ ne doit pas être une supposition mais en posant $u = \dots$ et $v = \dots$ on doit ALORS constater qu'elles sont $\mathscr{C}^1$.

> Si ette question a été traitée par une grande partie des candidats, trop souvent la formule est donnée sans justification. Rappelons que lorsque la formule est dans l'énoncé, les correcteurs sont pointilleux sur la preuve.
>
> Certains candidats ont cru nécessaire d'effectuer une démonstration par récurrence, compliquée.

6. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ A l'aide d'une majoration de u_n, montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.

Question un peu plus dure mais importante. Plusieurs bons éléments mais rarement de réponses complètes. Je rappelle que $u_n \to 0$ n'implique pas que la série converge !!!

> Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats. Déjà, beaucoup de candidats n'emploient pas la terminologie correcte, et/ou confondent la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$, avec celle de la série de terme général $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$, ce qui n'est pas du tout la même chose. Ensuite, les valeurs absolues sont, le plus souvent, absentes. D'autres candidats donnent des équivalences complètement fausses entre $\frac{\cos t}{t^2}$ et $\frac{1}{t^2}$ en l'infini, ou affirment que lorsque l'entier k tend vers l'infini, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ tend vers zéro, et concluent alors sur la convergence de la série de terme général $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$.
>
> Les correcteurs ont aussi trouvé quelques perles mathématiques :
>
> « si $t > +\infty$, la série diverge » ;
>
> « la fonction cosinus est monotone et de signe constant (sur $\mathbb{R}^+$) » ;
>
> « l'intervalle diverge ».

7. $\boxed{\text{2 pt}}$ En déduire que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Pas de bonne réponse. Pas si dure, cf corrigé.

Dans ce qui suit, a désigne un réel strictement positif.

8. $\boxed{\text{2 pt}}$ Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}a^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$ est absolument convergente.

Pas de difficulté majeur mais très peu de bonnes réponses. On passe à la valeur absolue et on majore ou on utilise la règle du n^2 pour s'en sortir.

> Cette question n'a pas été traitée correctement par tous les candidats. ~~Déjà, tous n'appliquent pas correctement le critère de d'Alembert.~~ Les correcteurs ont trouvé dans les copies beaucoup d'équivalents fantaisistes, ainsi que des signes « moins » dans des résultats issus d'une valeur absolue. De nombreux candidats affirment aussi que le quotient tend vers 0 sans preuve (équivalent ou autre).

9. $\boxed{\text{2 pt}}$ Soit

$$\psi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \psi(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Montrer que ψ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Un grand classique mais là encore pas de bonne réponse. Les apprentissages du cours sont bien trop superficiels, la preuve en est que quelques semaines plus tard vous ne connaissez déjà plus les hypothèses nécessaires. Sans un savoir solide du cours il est illusoire de pouvoir résoudre des questions du concours.

10. $\boxed{\text{2 pt}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que ψ admet un développement limité à l'ordre $2n$ en 0 que l'on précisera.

Plusieurs sont partis sur le caractère $\mathscr{C}^{2n}$ ce qui n'était pas vérifiable ici (du moins en 0 là où on souhaite le DL !!!) Il fallait écrire celui du sinus, diviser par t puis vérifier que la formule obtenue marche encore en 0. Cf le corrigé.

> Cette question n'a pas été traitée correctement par tous les candidats.
> La formule est souvent donnée juste, mais pas vérifiée pour $t = 0$ (ou alors, en essayant de faire croire à un résultat non démontré), ~~ou sans le rayon de convergence.~~

11.* $\boxed{\text{2+1(bonus) pt}}$ En déduire que $\displaystyle\int_0^x \psi(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$.

Un seul a pensé à la primitivation du développement limité. Dommage.

On admet dans la suite que

$$\int_0^a \psi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k a^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}.$$

Dans ce qui suit, la partie réel d'un nombre complexe z sera notée $\mathcal{R}e(z)$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n(t) = \frac{(-1)^n a^n}{n!}\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)$.

12. **1 pt** Définir la série exponentielle complexe et rappeler son domaine de convergence et sa somme totale.

Cadeau... Mais vous vous en êtes peu approprié les points finalement. Le cours, le cours, le cours...

> Cette question n'a pas été traitée correctement par tous les candidats. Déjà, beaucoup de candidats ont cru qu'il fallait donner le développement en série entière de la fonction qui, à tout réel x, associe e^{ix}, ou e^x. D'autres ont donné des réponses complètement fantaisistes, des rayons de convergence valant 0, ou 1, voire des développements limités.

13.* **2 pt** Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n(t)$ converge.

Très peu traitée.

On admet que $\forall N \in \mathbb{N}$, $V_N : t \mapsto \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} v_n(t)$ et $V : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

14.* **2 pt** Montrer que $\mathcal{R}e\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Non traitée.

15. **2 pt** Montrer que, pour tout entier naturel N :

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,a^n}{n!}\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\pi}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Non traitée.

> Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats. La manipulation de l'inégalité triangulaire est souvent mal maîtrisée : on lit souvent « $|\cos(n\,t)| \leq 1$ et donc $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots \cos(n\,t)\,dt\right| \leq \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots 1\,dt\right|$ ».
> De nombreux candidats affirment que $\left|\mathcal{R}e\,\left(e^{-i\,n\,t}\right)\right| \leq 1$ sans expliquer pourquoi.
> Certains candidats pensent enfin que le module de la partie réelle est égal à la partie réelle du module.

16.* **2 pt** Montrer également que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n\,a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\mathrm{d}t$ converge.

Non traitée.

17.* **2 pt** Déduire des deux questions précédentes que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\mathrm{d}t$$

Non traitée.

18. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Calculer pour $p = 0$: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-ipt}\right) \mathrm{d}t$, puis pour tout entier naturel non nul n : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right) \mathrm{d}t$. *(On pensera à distinguer les cas, en fonction de la parité de n).*
   Très abordable !! Mais peu d'entre vous l'ont tenté.

   Cette question a été traitée correctementpar la majorité des candidats.
   Pour le reste, nous précisons que « $\pm\frac{1}{n}$ » n'est pas une réponse valable : il faut préciser quand le signe est positif ou négatif.

19. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire une expression de de la partie réelle de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}} dt$ en fonction de la somme totale d'une série.
   Non traitée.

   Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats. Quelques candidats ont bien pensé à sortir le $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x\cos(t)}\,\mathrm{d}t.$$

20.* $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que la fonction exponentielle est 1-lipschitzienne sur $]-\infty; 0]$.
   Quelques bonnes réponses. Pas assez à mon goût vu le nombre de fois où nous l'avons traité. Des confusions entre le x, y, z...

21.* $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire que F est $\frac{\pi}{2}$-lispchitzienne sur $[0; +\infty[$.
   Pas très compliquée mais non abordée.

22.* $\boxed{\textbf{1 pt}}$ En déduire que F est continue sur $[0; +\infty[$.
   Facile mais non abordée.

23. $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Déterminer le sens de variation de la fonction $h : \begin{array}{ccc} [0; \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{-a\cos(t)} \end{array}$.
   Facile !!! Quelques-uns ont pensé à la faire mais vous auriez dû tous la résoudre.

   Cette question a été traitée correctementpar la majorité des candidats. Les les correcteurs ont cependant trouvé des copies où les candidats ne semblent pas savoir dériver la fonction $t \mapsto e^{-a\cos t}$ par rapport à t.

24. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que pour tout $a \geqslant 1$, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\cos(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}}$.
   Une ou deux bonnes réponses. Pas si dure et à savoir.

   Cette question a été traitée correctement par la majorité des candidats.

25. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ En déduire la valeur $\lim\limits_{a\to+\infty} F(a)$.

Non réussie.

> Cette question n'a été traitée correctement que par peu de candidats, et a permis de départager les meilleurs copies. Certains candidats ont donné une limite qui dépend de a.

26. $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Déterminer, pour tout réel t de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ la partie réelle, la partie imaginaire et le module de $\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}$.

Encore une question de cours. Personne ne la faite malheureusement.

> Les candidats qui ont traité cette question l'ont fait avec beaucoup de soin.

27. $\boxed{\textbf{2+1 pt}}$ Montrer que pour $a \geqslant 1$, $\left|\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant F(a)$ et en déduire

$\lim\limits_{a\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right)\mathrm{d}t$.

Non traitée.

> La première partie de cette question a été traitée par une grande partie des candidats, par contre, il n'en est pas de même de la fin.
> En général, les candidats ayant donné la partie réelle en e. ont aussi bien répondu à cette question.
> Pas mal de candidats ayant admis la valeur de $\lim\limits_{a\to 0 \leftarrow +\infty} F(a)$ ont grapillé des points.

28. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ En déduire, à l'aide des résultats précédents, la valeur de :

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^a \psi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Non traitée.

> Cette question, qui a permis de départager les meilleurs candidats, n'a été que très peu traitée.

Problème II - Algèbre (d'après banque PT 2019) $\boxed{\textbf{39 pt}}$

> **Rapport sur l'épreuve de Mathématiques A**
>
> L'épreuve était composée d'un problème d'algèbre linéaire (découpé en quatre parties) qui étudiait diverses propriétés des matrices antisymétriques, et d'un exercice de probabilités sur un couple de variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques (décalées).

n et p étant deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note A^T la transposée de la matrice A. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on note $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite antisymétrique si $A^T = -A$. On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Partie 1 : Cours $\boxed{6 \text{ pt}}$

Cette partie était censée être relativement facile et rapporter des points aux candidats, ce qui a été loin d'être le cas avec beaucoup d'erreurs très inquiétantes.

1. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

   Facile ! ! ! Pas mal de bonnes réponses. Il faut absolument savoir le faire.

   Pour commencer, beaucoup de candidats ne parviennent pas à vérifier correctement que l'ensemble des matrices antisymétriques forme un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices carrées, la plupart affirmant que si deux matrices A et B sont antisymétriques, alors $A + \lambda B$ l'est encore, sans aucune justification. Ils semblent répéter un schéma de preuve souvent vu durant l'année sans vraiment comprendre ce qu'il faut faire.

2. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que toute matrice $A \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

   avec α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$.

   Bien dans l'ensemble. Quelques-uns parachutent le faite que les coefficients diagonaux sont nuls ou établissent plutôt la réciproque.

   Il fallait dans une deuxième question déterminer la forme générale d'une matrice antisymétrique (en dimension 3) ; le problème d'implication utilisée dans le mauvais sens est revenu, une très grande majorité de candidats se contentant de vérifier que la matrice donnée était symétrique.

3. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire une base de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))$.

   D'importantes lacunes sur la nature des objets pour certains mais bien dans l'ensemble.

   Il était alors facile de déduire de la question précédente une famille génératrice de l'ensemble des matrices antisymétriques (même si, pour beaucoup, une base ne peut être constituée que de vecteurs colonnes), mais très peu vérifient (ou seulement disent) que cette famille est libre pour obtenir une base.

Partie 2 : Lien entre matrice antisymétrique et matrice orthogonale $\boxed{19 \text{ pt}}$

Le but de cette partie était d'obtenir l'équivalence

$$A \text{ antisymétrique} \iff \exists B \text{ orthogonale}, A = (I+B)^{-1}(I-B).$$

Cette partie, plus théorique, a été globalement mal traitée, exceptés les quelques calculs formels sur les matrices (même si des simplifications miraculeuses s'opèrent souvent). L'erreur la plus commune est l'argument « $AX = 0$ et A est non nulle donc $X = 0$ » (!!!). Peu de candidats font le lien entre le produit scalaire usuel et son expression matricielle et donc ne voient pas que $X^T X$ est en fait la norme euclidienne de X.

On se fixe dans cette partie un entier naturel n non nul et une matrice $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

4. **2+1 pt** Montrer que pour toute matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et toute matrice carrée B d'ordre n, on a :

$$X^T BX = X^T B^T X.$$

En déduire que $X^T AX = 0$.

Plus dure pour la première partie, très peu réussie. La seconde partie plus facile a été plus souvent traitée.

5. **3 pt** Soit une matrice colonne X telle que $(A+I)X = 0$. En calculant $X^T(A+I)X$ de deux manières différentes, montrer que $X = 0$.

Des confusions. Je rappelle que $(A+I)X = 0$ n'implique pas en général que $X = 0$ ou que $A+I = 0$ c'est un résultat faux que l'on a répété très souvent au cours de l'année !

6.* **3 pt** Montrer que l'application φ définie pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par $\varphi(X) = (A+I)X$ est un automorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

De bons éléments globalement. Peu de réponses complètes malheureusement mais des définitions sues. A consolider encore.

On admet que $A+I$ est inversible.

7. **2 pt** Montrer que la matrice $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ est inversible et que $B^{-1} = B^T$.

Pas très difficile !! Au moins pour le démarrage. Puisqu'on nous donne le résultat $B^{-1} = B^T$, il nous suffit juste de le vérifier et donc de montrer que $BBT = I$. A revoir.

8. **2 pt** Calculer $(I+B)(I+A)$. En déduire que $I+B$ est inversible.

Peu de bonnes réponses.

9. **2+1+3 pt** Réciproquement, soit B une matrice inversible telle que $B^{-1} = B^T$ et telle que $I+B$ soit inversible. On considère la matrice $C = (I+B)^{-1}(I-B)$. Montrer que l'on a

$$C = I - B - BC$$

puis que

$$C^T = I - B^{-1} - C^T B^{-1}$$

et enfin que la matrice C est antisymétrique.

Deux trois copies intéressantes. Attention, les matrices ne commutent pas en général !! Là aussi nous l'avons souvent répété dans l'année : $CB \neq BC$ a priori.

Partie 3 : Autour de l'endomorphisme associé **14 pt**

Là encore, cette partie tait plus théorique, et consistait à montrer que toute matrice antisymétrique est semblable à une matrice bloc de la forme

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où C est une matrice inversible d'ordre pair. A part les toutes premières questions élémentaires, cette partie a été très peu traitée, même la décomposition $Im\, f \oplus Ker\, f = \mathbb{R}^n$ pour un endomorphisme antisymétrique a posé des difficultés à la grande majorié des candidats.

On se fixe dans cette partie un entier naturel non nul n et une matrice $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. On confond $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$ et on note

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ X & \mapsto & AX. \end{array}$$

On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

10. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Soient $X \in \mathbb{R}^n$ et $Y = AX$. On suppose que $AY = 0$. Montrer que $Y^T Y = 0$.

    Pas mal de bonnes réponses. Quelques absurdités aussi.

11. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

    Non réussie. A retravailler.

12.* $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Soit $p = \mathrm{rg}(f)$. En déduire qu'il existe $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une base de $\mathbb{R}^n$ telle que

    (i) $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots e_p)$,

    (ii) $\forall i \in [\![p+1;n]\!]$, $f(e_i) = 0$.

    Une belle réponse. Très ressemblant à la question 17 du DM9.

13.* $\boxed{\textbf{1+2 pt}}$ Soit g la restriction de f, définie sur $\mathrm{Im}(f)$ et à valeurs dans $\mathrm{Im}(f)$:

$$g : \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(f) & \to & \mathrm{Im}(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

    Montrer que g est bien définie sur $\mathrm{Im}(f)$ à valeurs dans $\mathrm{Im}(f)$ et que g est un automorphisme de $\mathrm{Im}(f)$.

    Quelques éléments parfois mais rarement de réponses complètes.

14.* $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On suppose $X \neq 0$ et on note $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$ le vecteur composé des nombres complexes conjugués des coordonnées du vecteur X. Montrer que $\overline{X}^T X$ est un réel strictement positif.

    Pas dure ! ! ! Mais très peu abordée.

15. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f(X) = AX = \lambda X$. En calculant de deux façons différentes $\overline{X}^T AX$, montrer que λ est imaginaire pur.

    Non réussie.