Corrigé du Devoir Surveillé 8
Mini Concours Blanc

Problème I - Analyse (d'après banque PT 2018)

Partie 1 : Préambule

On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et une fonction f, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$.

1. Puisque la fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ alors la fonction f' est **continue** sur le **segment** $[a;b]$. Donc par le théorème des bornes atteintes, on en déduit que f' est bornée sur $[a;b]$:

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t \in [a;b], \qquad |f'(t)| \leqslant M.}$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par l'inégalité triangulaire pour l'intégrale car $a < b$, on a

$$0\left|\frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{k}\int_a^b \left|f'(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\right|\mathrm{d}t = \frac{1}{k}\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t, \qquad \text{car } \left|\mathrm{e}^{ikt}\right| = 1 \text{ car } kt \in \mathbb{R}.$$

Par la question précédente, et la croissance de l'intégrale, car $a < b$, on obtient,

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{k}\int_a^b M\,\mathrm{d}t = \frac{M\,(b-a)}{k}.$$

Or $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{M\,(b-a)}{k} = 0$. Donc par le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t\right| = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty, k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t = 0.}$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Posons,

$$\forall t \in [a;b], \qquad \begin{cases} u(t) = \frac{\mathrm{e}^{ikt}}{ik} \\ v(t) = f(t). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$ et

$$\forall t \in [a;b], \qquad \begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^{ikt} \\ v'(t) = f'(t). \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t &= \left[f(t)\frac{\mathrm{e}^{ikt}}{ik}\right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f'(t)\frac{\mathrm{e}^{ikt}}{ik}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^{ikb}\,f(b) - \mathrm{e}^{ika}\,f(a)}{ik} + i\frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or par la question précédente,

$$\lim_{k\to+\infty, k\in\mathbb{N}} i\frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t = 0.$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \left|\frac{\mathrm{e}^{ikb}\,f(b) - \mathrm{e}^{ika}\,f(a)}{ik}\right| \leqslant \frac{\left|\mathrm{e}^{ikb}\,f(b)\right| + \left|\mathrm{e}^{ika}\,f(a)\right|}{k} = \frac{|f(b)| + |f(a)|}{k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{k\to+\infty, k\in\mathbb{N}} i\frac{1}{k}\frac{\mathrm{e}^{ikb}\,f(b) - \mathrm{e}^{ika}\,f(a)}{ik} = 0.$$

Par somme, on en conclut que

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty, k\in\mathbb{N}} \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t = 0.}$$

Partie 2 : intégrale de Dirichlet

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$I_n = \int_\pi^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. Or puisque $n \geqslant 1$, $[\pi; n\pi] \subseteq [\pi; +\infty[\subseteq]0; +\infty[$. Donc $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur le segment $[\pi; n\pi]$. Donc I_n existe. De même $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $]0; +\infty[$ et $[n\pi; (n+1)\,\pi]$ est un segment inclus dans $]0; +\infty[$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad I_n \text{ et } u_n \text{ existent.}}$$

5. Soit $n \geqslant 2$. Posons

$$\forall t \in [\pi; n\pi]\,, \quad \begin{cases} u(t) = -\cos(t) \\ v(t) = \frac{1}{t}. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $[\pi; n\pi]$ et

$$\forall t \in [\pi; n\pi]\,, \quad \begin{cases} u'(t) = \sin(t) \\ v'(t) = -\frac{1}{t^2}. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$I_n = \int_\pi^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_{t=\pi}^{t=n\pi} - \int_\pi^{n\pi} \frac{-\cos(t)}{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{-1}{\pi} - \int_\pi^{n\pi} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{1}{\pi} - \int_\pi^{n\pi} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [n\pi; (n+1)\pi]$, on a

$$\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Donc par la croissance de l'intégrale, car $n\pi \leqslant (n+1)\pi$,

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_{t=n\pi}^{t=(n+1)\pi} = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{(n+1)\pi} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)\pi} = \frac{1}{n(n+1)\pi}.$$

Donc par l'inégalité triangulaire, car $n\pi \leqslant (n+1)\pi$,

$$0 \leqslant \left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \mathrm{d}t = \frac{1}{n(n+1)\pi}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant |u_n| \leqslant \frac{1}{n(n+1)\pi}.$$

Or $\frac{1}{n(n+1)\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2\pi}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2\pi} > 0$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2\pi}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)\pi}$. Donc par l'inégalité précédente et le théorème de comparaison, on en déduit que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n| \text{ converge.}$$

Autrement dit $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

7. Soit $n \geqslant 2$. Par la relation de Chasles, on observe que

$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} u_k.$$

Donc par la question précédente, $\left(\int_{\pi}^{n\pi} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 1}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

De plus, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{\pi}$. Conclusion, par la question 5. $\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}}$ et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = -\frac{1}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.}$$

Dans ce qui suit, a désigne un réel strictement positif.

8. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{(-1)^{n+1}a^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant |w_n| \leqslant \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} = a \times \frac{(a^2)^n}{(2n+1)(2n+1)!} \leqslant a \times \frac{(a^2)^n}{(2n+1)!} \leqslant a \times \frac{(a^2)^n}{n!}$$

On reconnait alors le terme général d'une série exponentielle de paramètre a^2 qui converge. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |w_n|$ converge i.e. $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ converge absolument : conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}\, a^{2n+1}}{(2n+1)\,(2n+1)!} \text{ converge absolument.}}$$

9. Soit

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \psi(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

La fonction ψ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonction qui le sont. Montrons que ψ est $\mathscr{C}^1$ en 0. Appliquons le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$.

- On sait que $\sin(t) \underset{t\to 0}{=} t + o(t)$. Donc $\psi(t) \underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{=} 1 + o(1)$. En particulier,

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \psi(t) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{\sin(t)}{t} = 1 = \psi(0).$$

  Donc ψ est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.
- On sait que ψ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \psi'(t) = \frac{\cos(t)t - \sin(t)}{t^2}.$$

- Donc

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &\underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{=} \frac{t\left(1 - \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)\right) - \left(t - \frac{t^3}{6} + o\left(t^3\right)\right)}{t^2} \\
&\underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{=} \frac{t - \frac{t^3}{2} + o\left(t^3\right) - t + \frac{t^3}{6} + o\left(t^3\right)}{t^2} \\
&\underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{=} \frac{-\frac{t^3}{3} + o\left(t^3\right)}{t^2} \\
&\underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{=} -\frac{t}{3} + o\left(t\right).
\end{aligned}$$

  En particulier,

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \psi'(t) = 0.$$

De ces trois points, on en déduit que

$$\boxed{\psi \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ en } 0 \text{ et même sur } \mathbb{R}.}$$

Et en particulier, $\psi'(0) = 0$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il semble bien compliqué de montrer que ψ est de classe $\mathscr{C}^{2n}$. Exhibons plutôt directement ce développement limité. On sait que

$$\sin(t) \underset{t\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, t^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(t^{2n+1}\right).$$

Par suite,

$$\frac{\sin(t)}{t} \underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!} + o\left(t^{2n}\right).$$

Donc

$$\psi(t) \underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!} + o\left(t^{2n}\right).$$

Or $\psi(0) = 1$ et pour $t = 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{1!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!} = 1.$$

Donc l'égalité asymptotique est encore vraie pour $t = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\psi \text{ admet un développement limité à l'ordre } 2n \text{ en } 0}$$

donné par

$$\boxed{\psi(t) \underset{t\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!} + o\left(t^{2n}\right).}$$

11. On a vu que la fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc par le théorème fondamental de l'analyse,

$$\Psi : x \mapsto \int_0^x \psi(t)\,\mathrm{d}t,$$

est une primitive de ψ (et même la primitive de ψ qui s'annule en 0). Donc par la question précédente et le théorème de primitivation des développements limités,

$$\Psi(x) \underset{x\to 0}{=} \Psi(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

Or $\Psi(0) = 0$ par construction. Conclusion,

$$\boxed{\int_0^x \psi(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right).}$$

On admet désormais que

$$\int_0^a \psi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k a^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}$$

Dans ce qui suit, la partie réel d'un nombre complexe z sera notée $\mathcal{R}e(z)$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n(t) = \frac{(-1)^n a^n}{n!}\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)$.

12. C'est cadeau. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série exponentielle de paramètre z est $\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}.}$ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, cette série converge et

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z.}$$

13. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant |v_n(t)| = \left|\frac{(-1)^n a^n}{n!}\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\right| = \frac{a^n}{n!}\left|\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\right| \leqslant \frac{a^n}{n!}\left|\mathrm{e}^{-int}\right| = \frac{a^n}{n!},$$

car on rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\mathcal{R}e(z)| \leqslant |z|$.

Par la question précédente, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^n}{n!}$ converge en tant que série exponentielle. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |v_n(t)|$ converge. Autrement dit $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n(t)$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n(t) \text{ converge.}}$$

On admet que $\forall N \in \mathbb{N}$, $V_N : t \mapsto \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n(t)$ et $V : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

14. On sait par la question 12. en prenant $z = -a\,\mathrm{e}^{-it}$,

$$\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-a\,\mathrm{e}^{-it}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n\,\mathrm{e}^{-int}}{n!}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{R}e\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\,\mathrm{d}t\right) &= \mathcal{R}e\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n\,\mathrm{e}^{-int}}{n!}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n\,\mathrm{e}^{-int}}{n!}\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On sait que la partie réelle est linéaire donc pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{R}e\left(\sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n a^n\,\mathrm{e}^{-int}}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{p} \mathcal{R}e\left(\frac{(-1)^n a^n\,\mathrm{e}^{-int}}{n!}\right).$$

De plus, la partie réelle est continue. Donc par passage à la limite quand $p \to +\infty$,

$$\mathcal{R}e\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n\,\mathrm{e}^{-int}}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{R}e\left(\frac{(-1)^n a^n\,\mathrm{e}^{-int}}{n!}\right)\mathrm{d}t.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}e\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\,\mathrm{d}t\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{R}e\left(\frac{(-1)^n a^n\,\mathrm{e}^{-int}}{n!}\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!}\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{R}e\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t.}$$

15. Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geqslant N+1$, on a vu dans la question précédente,

$$|v_n(t)| \leqslant \frac{a^n}{n!}.$$

Donc par l'inégalité triangulaire, pour tout $p \geqslant N+1$,

$$\left|\sum_{n=N+1}^{p} v_n(t)\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{p} |v_n(t)| \leqslant \sum_{n=N+1}^{p} \frac{a^n}{n!}.$$

Donc par passage à la limite quand $p \to +\infty$, (et continuité de la valeur absolue)

$$|V_N(t)| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Par croissance de l'intégrale (les deux fonctions sont continues, celle de gauche d'après l'énoncé et celle de droite étant constante), car les bornes sont dans le bon sens,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} |V_N(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}}_{=\text{constante}}\,\mathrm{d}t \\
\Leftrightarrow \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} |V_N(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Donc par l'inégalité triangulaire pour l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} V_N(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} |V_N(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$$

On pouvait aussi invoquer directement l'inégalité triangulaire pour les séries (propIV.4 chap18).

Conclusion,

$$\boxed{\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\pi}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}.}$$

16. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n \frac{a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\mathrm{d}t$. De même que précédemment, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \left|(-1)^n \frac{a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\mathrm{d}t\right| \\
&= \frac{a^n}{n!} \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\right|\mathrm{d}t \qquad \text{par l'inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \frac{a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\mathrm{e}^{-int}\right|\mathrm{d}t \\
&= \frac{a^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{a^n}{n!}.
\end{aligned}$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\pi}{2}\frac{a^n}{n!}$, converge en tant que série exponentielle. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge absolument. La convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{a^n}{n!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

17. Soit $N\in\mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{N} v_n(t) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{N} v_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t && \text{par linéarité} \\
&= \underbrace{\sum_{n=0}^{N}\int_0^{\frac{\pi}{2}} v_n(t)\,\mathrm{d}t}_{=S_N} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t}_{T_N} && \text{car la somme est finie.}
\end{aligned}$$

Par la question précédente, $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite converge et par définition,

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} v_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'autre part, par la question 15.

$$0 \leqslant |T_N| \leqslant \frac{\pi}{2}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{a^n}{n!}.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{a^n}{n!}$ est une série converge. Nécessairement, son reste d'ordre N tend vers 0 :

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{a^n}{n!} = 0.$$

Donc par le théorème d'encadrement (pour les suites), on en déduit que $(|T_N|)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et ainsi,

$$\lim_{N\to+\infty} T_N = 0.$$

Or,

$$\forall N\in\mathbb{N},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t = S_N + T_N,$$

Donc par passage à la limite sur N,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} S_N + 0 = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} v_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Conclusion,

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{a^n}{n!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\mathrm{d}t.}$$

18. Pour $p=0$, on a
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-ipt}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e(1)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{Si p=0,}\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-ipt}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.}$$
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Si $n=2p$ est pair, $p\in\mathbb{N}^*$. Alors,
$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-i2pt}\right)\mathrm{d}t \\
&= \mathcal{R}e\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-i2pt}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \mathcal{R}e\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{-i2pt}}{-2ip}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}\right) \qquad \text{car } p\neq 0 \\
&= \mathcal{R}e\left(\frac{\mathrm{e}^{-i\pi}-1}{-2ip}\right) \\
&= \mathcal{R}e\left(\frac{(-1)^p-1}{2p}i\right) \\
&= 0 \qquad \text{car } \frac{(-1)^p-1}{2p}i\in i\mathbb{R}.
\end{aligned}$$
Si $n=2p+1$ est impair, $p\in\mathbb{N}$. Alors, de même,
$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\mathrm{d}t &= \mathcal{R}e\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{-i(2p+1)t}}{-i\,(2p+1)}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}\right) \qquad \text{car } 2p+1\neq 0 \\
&= \mathcal{R}e\left(\frac{\mathrm{e}^{-i\left(p\pi+\frac{\pi}{2}\right)}-1}{2p+1}i\right) \\
&= \mathcal{R}e\left(\frac{(-1)^p\times(-i)-1}{2p+1}i\right) \\
&= \mathcal{R}e\left(\frac{(-1)^p-i}{2p+1}\right) \\
&= \frac{(-1)^p}{2p+1}.
\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{(-1)^p}{2p+1} & \text{si } n=2p+1 \text{ est impair.}\end{cases}}$$

19. Par la question 14. on a
$$\mathcal{R}e\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t.$$
Puis, par la question 17.
$$\mathcal{R}e\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{a^n}{n!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-int}\right)\mathrm{d}t.$$
Donc par la question précédente,
$$\mathcal{R}e\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{\pi}{2}+0+\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^{2p+1}\frac{a^{2p+1}}{(2p+1)!}\frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{R}e\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\, a^{2p+1}}{(2p+1)\,(2p+1)!}.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x\cos(t)}\,\mathrm{d}t.$$

20. Soit $(x,y) \in \,]-\infty;0]^2$, $x \neq y$. La fonction exponentielle est continue sur $[x;y]$ (ou $[y;x]$) et dérivable sur $]x;y[$ (ou $]y;x[$). Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists c \in \,]x;y[\ \text{ (ou }]y;x[), \quad \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y}{x-y} = \exp'(c).$$

Donc

$$|\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y| = |\mathrm{e}^c|\,|x-y| = \mathrm{e}^c\,|x-y| \leqslant \sup_{t\in]x;y[} \mathrm{e}^t\,|x-y|\,.$$

La fonction exponentielle étant croissante sur $]-\infty;0]$, pour tout $t \leqslant 0$, $\mathrm{e}^t \leqslant 1$. Donc

$$|\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y| \leqslant |x-y|\,.$$

Ce qui reste vrai si $x = y$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction exponentielle est 1-lipschitzienne sur }]-\infty;0].}$$

21. Soit $(x,y) \in [0;+\infty[^2$. Alors,

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(y)| &= \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x\cos(t)}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-y\cos(t)}\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x\cos(t)} - \mathrm{e}^{-y\cos(t)}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\mathrm{e}^{-x\cos(t)} - \mathrm{e}^{-y\cos(t)}\right|\mathrm{d}t \qquad \text{par l'inégalité triangulaire car } \frac{\pi}{2} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Or pour $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(t) \geqslant 0$. Donc $x' = -x\cos(t) \in \,]-\infty;0]$ et $y' = -y\cos(t) \in \,]-\infty;0]$. Donc par la question précédente,

$$\left|\mathrm{e}^{-x\cos(t)} - \mathrm{e}^{-y\cos(t)}\right| \leqslant |-x\cos(t) - (-y\cos(t))| = |x-y|\,|\cos(t)| \leqslant |x-y|\,.$$

Donc par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens,

$$|F(x) - F(y)| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} |x-y|\,\mathrm{d}t = |x-y| \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\,|x-y|\,.$$

Ceci étant vrai pour tout $(x,y) \in [0;+\infty[^2$, on conclut que,

$$\boxed{F \text{ est } \frac{\pi}{2}\text{-lispchitzienne sur } [0;+\infty[.}$$

22. Soit $x_0 \in [0;+\infty[$. Pour tout $x \in [0;+\infty[$ on par la question précédente,

$$0 \leqslant |F(x) - F(x_0)| \leqslant \frac{\pi}{2}\,|x - x_0|\,.$$

Or $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\pi}{2}|x-x_0| = 0$. Donc par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to x_0}|F(x)-F(x_0)| = 0$. Autrement dit,

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in [0;+\infty[$, on en conclut que

$$\boxed{F \text{ est continue sur } [0;+\infty[.}$$

23. La fonction $t \mapsto \cos(t)$ est décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Donc, puisque $a \geqslant 0$, $t \mapsto -a\cos(t)$ est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Par composée avec la fonction exponentielle qui est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est croissante sur } \left[0;\frac{\pi}{2}\right].}$$

24. Soit $a \geqslant 1$. Par la question précédente,

$$\forall t \in \left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}};\frac{\pi}{2}\right], \quad h(t) \leqslant \mathrm{e}^{-a\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1.$$

Or $a \geqslant 1$ donc $\sqrt{a} \geqslant 1$ et donc $\frac{1}{\sqrt{a}} \leqslant 1 \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Ainsi, par croissance de l'intégrale,

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\cos(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\cos(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}}.}$$

25. Par la relation de Chasles pour $a \geqslant 1$,

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathrm{e}^{-a\cos(t)}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\cos(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Par la question précédente,

$$F(a) \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathrm{e}^{-a\cos(t)}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Par croissance de la fonction h puis de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
F(a) &\leqslant \mathrm{e}^{-a\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{a}} \\
&= \mathrm{e}^{-a\sin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right) + \frac{1}{\sqrt{a}} \\
&\leqslant \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-a\sin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)} + \frac{1}{\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

De plus pour tout $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{e}^{-a\cos(t)} \geqslant 0$. Donc par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens, $F(a) \geqslant 0$. D'où

$$0 \leqslant F(a) \leqslant \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-a\sin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)} + \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Posons $u = \frac{1}{\sqrt{a}}$. On a $u \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$. Donc

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Dès lors,

$$-a\sin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \underset{a\to+\infty}{\sim} -\sqrt{a} \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Donc $\lim\limits_{a\to+\infty} -a\sin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = -\infty$ et par composée,

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-a\sin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)} = 0.$$

Ainsi, $\lim\limits_{a\to+\infty} \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-a\sin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)} + \frac{1}{\sqrt{a}} = 0$. Par le théorème d'encadrement, on en conclut que

$$\boxed{\lim_{a\to+\infty} F(a) = 0.}$$

26. Soit $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On a $\mathrm{e}^{-it} = \cos(t) - i\sin(t)$. Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}} = \mathrm{e}^{-a\cos(t)+ia\sin(t)} &= \mathrm{e}^{-a\cos(t)}\,\mathrm{e}^{ia\sin(t)} && \textit{(forme polaire)} \\ &= \mathrm{e}^{-a\cos(t)}\cos\left(a\sin(t)\right) + i\,\mathrm{e}^{-a\cos(t)}\sin\left(a\sin(t)\right) && \textit{(forme algébrique)} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right) = \mathrm{e}^{-a\cos(t)}\cos\left(a\sin(t)\right), \quad \mathcal{I}m\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right) = \mathrm{e}^{-a\cos(t)}\sin\left(a\sin(t)\right).}$$

et

$$\boxed{\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad \left|\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right| = \mathrm{e}^{-a\cos(t)}.}$$

27. Soit $a \geqslant 1$, alors $\frac{1}{\sqrt{a}} \leqslant 1 \leqslant \frac{\pi}{2}$. Par l'inégalité triangulaire, car les bornes sont dans le bon sens,

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \left|\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right)\right|\mathrm{d}t.$$

Or pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\left|\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right)\right| \leqslant \left|\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right| = \mathrm{e}^{-a\cos(t)} \qquad \text{par la question précédente.}$$

Donc par croissance de l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens,

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathrm{e}^{-a\cos(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\mathrm{e}^{-a\cos(t)} \geqslant 0$. Donc par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens,

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\cos(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Ainsi,

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathrm{e}^{-a\cos(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\cos(t)}\,\mathrm{d}t = F(a).$$

Conclusion,

$$\boxed{\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant F(a).}$$

De plus, par la question 25. $\lim\limits_{a\to+\infty} F(a) = 0$. Conclusion, par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{a\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right) \mathrm{d}t = 0.}$$

28. Soit $a \geqslant 1$. D'après l'énoncé, on a

$$\int_0^a \psi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, a^{2k+1}}{(2k+1)\,(2k+1)!}$$

De plus, par la question 19.

$$\mathcal{R}e\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\, a^{2p+1}}{(2p+1)\,(2p+1)!}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^a \psi(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\pi}{2} - \mathcal{R}e\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right)\mathrm{d}t - \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Par la question précédente, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right)\mathrm{d}t \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'autre part, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right)\right|\mathrm{d}t \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-a\cos(t)}\,\mathrm{d}t && \text{par la question 26.} \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{a}} && \text{par la question 24.}
\end{aligned}$$

Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{-a\,\mathrm{e}^{-it}}\right)\mathrm{d}t = 0.$$

Conclusion, par passage à la limite quand $a \to +\infty$,

$$\boxed{\int_0^a \psi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.}$$

Problème II - Algèbre (d'après banque PT 2019)

n et p étant deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note A^T la transposée de la matrice A. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on note $\operatorname{Tr}(A)$ sa trace. Une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite antisymétrique si $A^T=-A$. On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Partie 1 : Cours

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On observe les points suivants :

   - $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})\subseteq\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Si $A=0_n$, alors $0_n^T=0_n=-0_n$. Donc $0_n\in\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
   - Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et $(A,B)\in\mathscr{A}_n(\mathbb{R})^2$. Posons $C=\lambda A+\mu B$. Puisque $A\in\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, $A^T=-A$ et de même, $B\in\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, donc $B^T=-B$. Par linéarité de la transposée,
   $$C^T=(\lambda A+\mu B)^T=\lambda A^T+\mu B^T=-\lambda A-\mu B=-C.$$
   Donc $C=\lambda A+\mu B\in\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires.

   Ainsi, $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Conclusion,
   $$\boxed{\mathscr{A}_n(\mathbb{R})\ \text{est un espace vectoriel sur } \mathbb{R}.}$$

2. Soit $A\in\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$. Alors, $A\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donc il existe $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;3]\!]^2}$ tel que
   $$A=\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&a_{1,3}\\a_{2,1}&a_{2,2}&a_{2,3}\\a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,3}\end{pmatrix}.$$
   Puisque $A^T=-A$, on a
   $$\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&a_{1,3}\\a_{2,1}&a_{2,2}&a_{2,3}\\a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,3}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{2,1}&a_{3,1}\\a_{1,2}&a_{2,2}&a_{3,2}\\a_{1,3}&a_{2,3}&a_{3,3}\end{pmatrix}.$$
   Par unicité des coefficients d'une matrice,
   $$\begin{cases}a_{1,1}=-a_{1,1}\\a_{1,2}=-a_{2,1}\\a_{1,3}=-a_{3,1}\\a_{2,1}=-a_{1,2}\\a_{2,2}=-a_{2,2}\\a_{2,3}=-a_{3,2}\\a_{3,1}=-a_{3,1}\\a_{3,2}=-a_{2,3}\\a_{3,3}=-a_{3,3}\end{cases}\qquad\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}a_{1,1}=a_{2,2}=a_{3,3}=0\\a_{1,2}=-a_{2,1}\\a_{3,1}=-a_{1,3}\\a_{2,3}=-a_{3,2}\end{cases}.$$
   Posons $\gamma=a_{2,1}$, $\beta=a_{1,3}$ et $\alpha=a_{3,2}$. Alors, on trouve,
   $$\boxed{A=\begin{pmatrix}0&-\gamma&\beta\\\gamma&0&-\alpha\\-\beta&\alpha&0\end{pmatrix}.}$$
   avec α, β, $\gamma\in\mathbb{R}$.

3. Par la question précédente, si $A \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$, alors il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$A = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_2} + \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_3}.$$

Donc $A \in \mathrm{Vect}(E_1, E_2, E_3)$. Ainsi $\mathscr{A}_3(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Vect}(E_1, E_2, E_3)$. Réciproquement, si on suppose $A \in \mathrm{Vect}(E_1, E_2, E_3)$, alors, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$A = \alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3.$$

Par linéarité de la transposée,

$$\begin{aligned} A^T &= (\alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3)^T \\ &= \alpha E_1^T + \beta E_2^T + \gamma E_3^T \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T + \gamma \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad = -\alpha E_1 - \beta E_2 - \gamma E_3 \\ &= -A. \end{aligned}$$

Donc $A \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Vect}(E_1, E_2, E_3) \in\subseteq \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$. D'où

$$\mathscr{A}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(E_1, E_2, E_3).$$

Posons $\mathscr{B}_A = (E_1, E_2, E_3)$. On vient de montrer que $\mathscr{B}_A$ est génératrice de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$. Montrons que $\mathscr{B}_A$ est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$aE_1 + bE_2 + cE_3 = 0_3.$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \qquad \Leftrightarrow \qquad a = b = c = 0 \qquad \text{par unicité des coefficients.}$$

Donc $\mathscr{B}_A$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_A = (E_1, E_2, E_3) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \mathscr{A}_3(\mathbb{R}).}$$

En particulier,

$$\boxed{\dim(\mathscr{A}_3(\mathbb{R})) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_A) = 3.}$$

Partie 2 : Lien entre matrice antisymétrique et matrice orthogonale

On se fixe dans cette partie un entier naturel n non nul et une matrice $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Soient $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, $BX \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, donc $X^T BX \in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Dès lors,
$$X^T BX = \left(X^T BX\right)^T.$$
Par propriété de la transposée du produit,
$$X^T BX = X^T B^T \left(X^T\right)^T = X^T B^T X.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad X^T BX = X^T B^T X.}$$
En particulier, pour $B = A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$,
$$X^T AX = X^T A^T X = X^T(-A)X = -X^T AX.$$
Conclusion,
$$\boxed{X^T AX = 0.}$$

5. Soit une matrice colonne X telle que $(A+I)X = 0$. Alors,
$$X^T(A+I)X = X^T 0_{n,1} = 0_{\mathbb{R}}.$$
D'autre part,
$$X^T(A+I)X = X^T(AX+X) = X^T AX + X^T X = X^T X \qquad \text{par la question précédente.}$$
Posons $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$. Alors, $X^T = (x_1, \dots, x_n)$ et donc
$$X^T X = \sum_{k=1}^{n} x_i^2.$$
Donc
$$\begin{aligned} X^T X = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} x_i^2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \forall i \in [\![1;n]\!], \quad x_i^2 = 0 \qquad \text{car les } x_i^2 \text{ sont positifs} \\ &\Rightarrow \quad \forall i \in [\![1;n]\!], \quad x_i = 0 \\ &\Rightarrow \quad X = 0_{n,1} \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{X = 0_{n,1}.}$$

6. Soit φ l'application définie pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par $\varphi(X) = (A+I)X$. Montrons que φ est un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Autrement dit, montrons que
   - φ va de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,
   - φ est linéaire,
   - φ est bijective.

Tout d'abord, si $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, comme $A + i \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\varphi(X) = (A + I) X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Donc φ va bien de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrons que φ est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$. Alors,

$$\varphi(\lambda X + \mu Y) = (A + I)(\lambda X + \mu Y) = \lambda (A + I) X + \mu (A + I) Y = \lambda \varphi(X) + \mu \varphi(Y).$$

Donc φ est linéaire.

Montrons que φ est injective. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$X \in \operatorname{Ker}(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(X) = 0_{n,1} \quad \Leftrightarrow \quad (A + I) X = 0_{n,1}.$$

Par la question précédente, si $(A + I) X = 0_{n,1}$ alors $X = 0_{n,1}$. Réciproquement, si $X = 0_{n,1}$, alors $(A + I) X = 0_{n,1}$. Ainsi, $X \in \operatorname{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow X = 0_{n,1}$. D'où,

$$\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0\}.$$

Donc φ est injective. Or φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie (n). Donc par caractérisation des isomorphismes en dimension finie, on en déduit que φ est bijective. Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}).}$$

On admet que $A + I$ est inversible.

7. Soit $B = (I - A)(I + A)^{-1}$. Calculons :

$$\begin{aligned} BB^T &= (I - A)(I + A)^{-1} \left((I - A)(I + A)^{-1}\right)^{-1} \\ &= (I - A)(I + A)^{-1} \left[(I + A)^{-1}\right]^{-1} (I - A)^{-1} && \text{par propriété de l'inverse du produit} \\ &= (I - A)(I + A)^{-1} (I + A)(I - A)^{-1} \\ &= (I - A) I (I - A)^{-1} \\ &= I. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{B \text{ est inversible et } B^{-1} = B^T.}$$

8. On a les égalités matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} (I + B)(I + A) &= \left(I + (I - A)(I + A)^{-1}\right)(I + A) \\ &= I + A + (I - A)(I + A)^{-1}(I + A) && \text{en développant} \\ &= I + A + I - A \\ &= 2I. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{(I + B)(I + A) = 2I.}$$

D'où

$$(I + B)\left(\frac{1}{2} I + \frac{1}{2} A\right) = I,$$

et donc,

$$\boxed{I + B \text{ est inversible.}}$$

9. Réciproquement, soit B une matrice inversible telle que $B^{-1} = B^T$ et telle que $I + B$ soit inversible. On considère la matrice $C = (I+B)^{-1}(I-B)$. Dès lors,

$$(I+B)\,C = (I+B)\,(I+B)^{-1}(I-B) = I - B.$$

Donc $C + BC = I - B$. Conclusion,

$$\boxed{C = I - B - BC.}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} C^T &= (I - B - BC)^T \\ &= I - B^T - (BC)^T && \text{par linéarité de la transposée} \\ &= I - B^{-1} - C^T B^T && \text{par propriété de la transposée du produit} \\ &= I - B^{-1} - C^T B^{-1}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{C^T = I - B^{-1} - C^T B^{-1}.}$$

Donc

$$C^T B = B - I - C^T \qquad \Leftrightarrow \qquad C^T = B - I - C^T B.$$

Ainsi en sommant avec l'expression obtenue pour B, on a

$$C + C^T = I - B - BC + B - I - C^T B = -BC - C^T B.$$

Or B et C commutent : comme $(I+B)\,C = I - B$, on a

$$(I+B)\,CB = B - B^2 = B\,(I-B) = B\,(I+B)\,C = \left(B + B^2\right)C = (I+B)\,BC.$$

Comme $I + B$ est inversible en multipliant à gauche par $I + B$, on obtient

$$CB = BC.$$

Donc

$$C + C^T = -BC - C^T B = -CB - C^T B = -\left(C + C^T\right)B \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(C + C^T\right)(I+B) = 0.$$

Comme $I + B$ est inversible, on en déduit que $C + C^T = 0$. Conclusion, $C = -C^T$ et

$$\boxed{C \text{ est antisymétrique.}}$$

Partie 3 : Autour de l'endomorphisme associé

On se fixe dans cette partie un entier naturel non nul n et une matrice $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. On confond $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$ et on note

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ X & \mapsto & AX. \end{array}$$

On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

10. Soient $X \in \mathbb{R}^n$ et $Y = AX$. On suppose que $AY = 0$. Donc $0 = AY = A^2 X$. Puis,

$$Y^T Y = (AX)^T (AX) = X^T A^T AX = -X^T A^2 X \qquad \text{car } A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Comme $A^2 X = 0$, on en déduit que $-X^T A^2 X = 0$. Conclusion,

$$\boxed{Y^T Y = 0.}$$

11. Soit $Y \in \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f)$. Alors, $Y \in \operatorname{Im}(f)$. Donc il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $Y = f(X) = AX$. De plus, $Y \in \operatorname{Ker}(f)$. Donc $f(Y) = 0_{\mathbb{R}^n}$ i.e. $AY = 0_{\mathbb{R}^n}$. Par la question précédente, on en déduit que

$$Y^T Y = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Comme vu dans la question 5. cela implique que $Y = 0_{\mathbb{R}^n}$. Donc $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) \subseteq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Réciproquement, on sait que $\{0_{\mathbb{R}^n}\} \subseteq \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f)$. Donc

$$\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

Les espaces sont donc en somme directe. Montrons qu'ils sont supplémentaires. Par le théorème du rang, car l'espace de départ $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, on a

$$\dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\operatorname{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^n).$$

Par cette égalité et le caractère direct, on en déduit que

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f).}$$

12. Soit $p = \operatorname{rg}(f)$. Puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, il en va de même de $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$. De plus par hypothèse, $\dim(\operatorname{Im}(f)) = p$. Donc par le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = n - p$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\operatorname{Im}(f)$. Soit $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker}(f)$ (on note que les cardinaux des bases coïncident bien avec les dimensions). Donc par la question précédente et le théorème de la base adaptée,

$$\boxed{\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}^n.}$$

De plus, pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, $f(e_i)$ est un vecteur de l'image de f : $f(e_i) \in \operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ est engendré par $(e_1, \ldots, e_p)$. Donc

$$\boxed{\forall i \in [\![1; p]\!], \quad f(e_i) \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots e_p).}$$

D'autre part, pour tout $i \in [\![p+1; n]\!]$, e_i est un vecteur du noyau de f donc

$$\boxed{\forall i \in [\![p+1; n]\!], \quad f(e_i) = 0.}$$

On a donc bien construit une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ avec les propriétés voulues.

13. Soit g la restriction de f, définie sur $\operatorname{Im}(f)$ et à valeurs dans $\operatorname{Im}(f)$:

$$g : \begin{array}{ccc} \operatorname{Im}(f) & \to & \operatorname{Im}(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Puisque f est définie sur $\mathbb{R}^n$ et $\operatorname{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$, on en déduit qu'il est possible de restreindre f à $\operatorname{Im}(f)$. Montrons que g est bien à valeurs dans $\operatorname{Im}(f)$. Soit $x \in \operatorname{Im}(f)$. Alors, par définition de g,

$$g(x) = f(x).$$

Or $f(x)$ est un vecteur de $\operatorname{Im}(f)$. Donc $g(x) \in \operatorname{Im}(f)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \operatorname{Im}(f)$, on en conclut que

$$\boxed{g \text{ est bien définie sur } \operatorname{Im}(f) \text{ et à valeurs dans } \operatorname{Im}(f).}$$

Montrons que g est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, montrons que

- g va de $\operatorname{Im}(f)$ dans $\operatorname{Im}(f)$,
- g est linéaire,

- g est bijective.

Le premier point est garanti par ce qui précède.

Puisque $\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et que f est linéaire sur $\mathbb{R}^n$, par le cours, on en déduit que sa restriction g est aussi linéaire.

Montrons que g est injective. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(g)$. Alors, $g(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ ou encore $f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Donc $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Or $\mathrm{Ker}\,(g)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de départ de g : $\mathrm{Ker}\,(g) \subseteq \mathrm{Im}\,(f)$. Donc $x \in \mathrm{Im}\,(f)$. Ainsi,

$$x \in \mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f)\,.$$

Donc par la question 11. on en déduit que $x = 0_{\mathbb{R}^n}$. D'où $\mathrm{Ker}\,(g) \subseteq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Or $\{0_{\mathbb{R}^n}\} \subseteq \mathrm{Ker}\,(g)$. Donc $\mathrm{Ker}\,(g) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. D'où g est injective. Or g est un endomorphisme de $\mathrm{Im}\,(f)$ qui est de dimension finie p. Donc par la caractérisation des isomorphismes en dimension finie, on en déduit que g est bijective. Conclusion,

$$\boxed{g \text{ est un automorphisme de } \mathrm{Im}\,(f).}$$

14. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On suppose $X \neq 0$ et on note $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$ le vecteur composé des nombres complexes conjugués des coordonnées du vecteur X. Question de fin de sujet mais pourtant facile. Par définition du produit matriciel, on a

$$\overline{X}^T X = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\,.$$

Etant une somme de réels positifs, on en déduit que $\overline{X}^T X \geqslant 0$. Supposons $\overline{X}^T X = 0$. Alors, $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0$. Donc, comme les termes sont positifs, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $|x_i|^2 = 0$ i.e. $x_i = 0$. Ceci étant vrai pour tous les indices i, on en déduit que $X = 0$. Contradiction. Donc $\overline{X}^T X$ est non nul et positif. Conclusion,

$$\boxed{\overline{X}^T X \text{ est un réel strictement positif.}}$$

15. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f(X) = AX = \lambda X$. Alors, on a d'une part,

$$\overline{X}^T AX = \overline{X}^T (\lambda X) = \lambda \overline{X}^T X.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\overline{X}^T AX &= \overline{X}^T \left(-A^T\right) X && \text{car } A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \\
&= -\overline{X}^T \overline{A}^T X && \text{car } A \text{ est réelle} \\
&= -\left(\overline{AX}\right)^T X.
\end{aligned}$$

Or en passant au conjugué dans $AX = \lambda X$, on obtient que $\overline{AX} = \overline{\lambda X}$. D'où

$$\overline{X}^T AX = -\overline{\lambda X}^T X.$$

Ainsi,

$$\lambda \overline{X}^T X = -\overline{\lambda X}^T X.$$

Par la question précédente, $\overline{X}^T X$ est un réel strictement positif. Donc $\lambda = -\overline{\lambda}$. Conclusion,

$$\boxed{\lambda \text{ est imaginaire pur.}}$$

Le sujet comportait deux dernières questions d'algèbre mais du programme de seconde année !