Epreuve de mathématiques 9
2023-2024

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Probabilités

Une urne contient trois boules, de couleur rouge ou verte. On pioche successivement une boule dans l'urne avec le protocole suivant :

- si la boule piochée est verte, on la remplace par une boule rouge,
- si la boule piochée est rouge, on la remplace par une boule verte.

L'urne contient donc toujours à chaque étape trois boules, de couleur verte ou rouge.
On se munit d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ sur lequel sera défini toutes les variables aléatoires. On remplit l'urne initialement avec X_0 boules vertes et $3 - X_0$ boules rouges. On effectue ensuite les tirages et on note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k le nombre de boules de couleur verte dans l'urne juste après le tirage k.

Partie 1 : Application du cours

1. On suppose dans cette question que $X_0 = 0$.
   (a) Préciser la valeur de X_1, le nombre de boules vertes après le premier tirage.
   (b) Déterminer la loi de X_2.
   (c) Reconnaitre la loi de $Y_2 = X_2/2$.

On suppose maintenant que l'on tire un numéro X_0 dans $\{0, 1, 2, 3\}$ de façon équiprobable et on remplit alors initialement l'urne avec X_0 boules vertes et donc $3 - X_0$ boules rouges.

2. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 2)$.
3. Déterminer la loi de X_1.
4. Calculer la probabilité que l'urne contienne 1 boule verte initialement sachant qu'elle contient 2 boules vertes après le premier tirage.
5. Les évènements $(X_0 = 1)$ et $(X_1 = 2)$ sont-ils indépendants ?
6. Les évènements $(X_0 = 1)$ et $(X_2 = 1)$ sont-ils indépendants ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement « l'urne a toujours contenu, au moins deux boules vertes entre les tirages 0 et n »

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que

$$A_{2n} = (X_0 = 2, X_1 = 3, X_2 = 2, \dots, X_{2n} = 2) \cup (X_0 = 3, X_1 = 2, X_2 = 3, \dots, X_{2n} = 3).$$

8. En déduire $\mathbb{P}(A_{2n})$.
9. Préciser $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_{2n})$.

Partie 2 : Une chaine de Markov

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \mathbb{P}(X_n = 0), \quad b_n = \mathbb{P}(X_n = 1), \quad c_n = \mathbb{P}(X_n = 2), \quad d_n = \mathbb{P}(X_n = 3).$$

On note également $U_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix}$.

10. Préciser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n + c_n + d_n$.
11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$b_{n+1} = a_n + \frac{2}{3}c_n.$$
12. Exprimer de même pour tout $n \in \mathbb{N}$, sans justification, a_{n+1}, c_{n+1} et d_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n et d_n.
13. En déduire une matrice M que l'on précisera telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = MU_n$.
14. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$ en fonction de a_n et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n \geqslant 1) \neq 0$.

Partie 3 : Probabilité de survivre

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_n \geqslant 1)$ et B_n l'évènement « l'urne a toujours contenu, y compris initialement, au moins une boule verte ». Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

15. Montrer que $p_n = \frac{b_n}{1-a_n}$.
16. Exprimer B_n à l'aide des X_k.
17. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(X_{k+1} \geqslant 1, X_k \geqslant 1) = \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_k = 1) + \mathbb{P}(X_k = 2) + \mathbb{P}(X_k = 3).$$
18. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, une expression de $\mathbb{P}(X_{k+1} \geqslant 1, X_k \geqslant 1)$ en fonction uniquement de $\mathbb{P}(X_k \geqslant 1)$ et $\mathbb{P}(X_k = 1)$.
19. Montrer alors que
$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{3}{4}\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{3}p_k\right).$$
20. Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
21. On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{7}$. Quelle est la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} p_n$?
22. En déduire que $(-\ln(\mathbb{P}(B_n)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
23. Conclure en donnant $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

Problème 2 - Représentation matricielle

L'objectif de ce problème est de démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{3}{7}$*, où* p_n *a été défini dans le problème précédent. Ce problème peut néanmoins être traité de façon indépendante au problème 1.*

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par

$$\forall P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X], \quad f(P) = a_1 + (3a_0 + 2a_2)X + (2a_1 + 3a_3)X^2 + a_2X^3.$$

On note $\mathscr{C} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Partie 1 : Autour de f et A

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)$.
3. Calculer le rang de A.
4. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
5. Montrer que $\mathrm{Ker}(A - I_4)$ et $\mathrm{Ker}(A + I_4)$ sont en somme directe.
6. Calculer $\mathrm{Ker}(A - I_4)$ et $\mathrm{Ker}(A + I_4)$.
7. Quelle est la dimension de $F = \mathrm{Ker}(A - I_4) + \mathrm{Ker}(A + I_4)$?
8. Préciser $\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}\right)$ et $\mathrm{Ker}\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}\right)$.

Partie 2 : Diagonalisation

Soit P_1 le polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(P_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. On pose également $X_1 = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(P_1)$, $P_2 = 1 - 3X + 3X^2 - X^3$, $P_3 = 1 + X - X^2 - X^3$ et $P_4 = 1 - X - X^2 + X^3$ et enfin $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$.

9. Calculer AX_1.
10. Préciser P_1 et $f(P_1)$.
11. Justifier que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.
12. Préciser $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$ et justifier sans calcul que P est inversible.
13. Préciser $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.
14. Calculer P^{-1}.
15. Exprimer pour tout $i \in [\![1;4]\!]$, $f(P_i)$ en fonction de P_i. *On pourra utiliser les résultats de la question 8.*
16. En déduire sans calcul $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
17. Préciser le lien entre A, D et P.
18. **Déduire** de la question précédente A^{-1}. *On explicitera les coefficients de la matrice.*

Partie 3 : Calcul de p_n

On définit pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $g(M) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} b & 3a+2c \\ 2b+3d & c \end{pmatrix}$. On admet que $g \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.

On note $\mathscr{C}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

On pose enfin

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

19. Calculer $A' = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}'}(g)$.
20. Donner le lien entre A' et A. Peut-on en déduire que $g = \frac{1}{3}f$?
21. A l'aide de la question 17., montrer qu'il existe $\mathscr{B}'$ une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que $D' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(g)$.
22. Calculer $U = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u)$.
23. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(g^n(u))$.
24. Déterminer alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = g^n(u)$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ et on pose $p_n = \frac{b_n}{1-a_n}$.

25. Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{3}{7}$.

La matrice A' est la matrice de transition associée à la chaîne de Markov du problème 1. U représente la distribution uniforme initiale et donc $g^n(u)$ correspond à la matrice donnant les probabilités de présence dans chaque état à l'étape n : a_n, b_n, c_n et d_n, d'où on en déduit p_n. Pour calculer $g^n(u)$ on fait appel à l'algèbre linéaire pour changer de base/diagonaliser afin d'accéder facilement aux puissances. Je sais. Vous êtes comme moi, béat d'admiration face à la beauté et la puissance des mathématiques.