Commentaires du DS9
Probabilités et Représentation matricielle

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{60}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1.1	P1.2	P1.3	P1	P2.1	P2.2	P2.3	P2	Total	Note finale
Moyenne	-1	5,9	2,4	0,6	8,9	6,2	6,2	1,4	13,7	21,58	8,54
Sur		18	8	18	44	14	16	13	43	87	20

TOTAL : 87 pt

Problème I - Probabilités 44 pt

Une urne contient trois boules, de couleur rouge ou verte. On pioche successivement une boule dans l'urne avec le protocole suivant :

- si la boule piochée est verte, on la remplace par une boule rouge,
- si la boule piochée est rouge, on la remplace par une boule verte.

L'urne contient donc toujours à chaque étape trois boules, de couleur verte ou rouge.
On se munit d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ sur lequel sera défini toutes les variables aléatoires. On remplit l'urne initialement avec X_0 boules vertes et $3 - X_0$ boules rouges. On effectue ensuite les tirages et on note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k le nombre de boules de couleur verte dans l'urne juste après le tirage k.

Partie 1 : Application du cours 18 pt

1. On suppose dans cette question que $X_0 = 0$.
   (a) **1 pt** Préciser la valeur de X_1, le nombre de boules vertes après le premier tirage.
   Facile et bien réussie. A justifier en français a minima vu la facilité de la question.
   (b) **1 pt** Déterminer la loi de X_2.
   Facile aussi mais moins réussie. Plusieurs ont été perturbés du fait que la loi n'était pas usuelle. Aucun souci dans ce cas, on se contente de donner l'univers image et les probabilités des issues. Certains ont forcé une loi de Bernoulli, ce qui n'était pas le cas.
   (c) **1 pt** Reconnaitre la loi de $Y_2 = X_2/2$.
   Cette fois, c'était bien une Bernoulli mais vous êtes peu nombreux finalement à l'avoir vu.

On suppose maintenant que l'on tire un numéro X_0 dans $\{0, 1, 2, 3\}$ de façon équiprobable et on remplit alors initialement l'urne avec X_0 boules vertes et donc $3 - X_0$ boules rouges.

2. **2 pt** Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 2)$.
   Un nombre satisfaisant de bonnes réponses avec l'hypothèse du système complet et la citation de la formule.
3. **2 pt** Déterminer la loi de X_1.
   Assez bien lorsqu'elle a été traitée.
4. **2 pt** Calculer la probabilité que l'urne contienne 1 boule verte initialement sachant qu'elle contient 2 boules vertes après le premier tirage.
   Vous avez bien vu la formule de Bayes. Quelques erreurs sur la formule persistent.

5. **2 pt** Les évènements $(X_0 = 1)$ et $(X_1 = 2)$ sont-ils indépendants ?
   Bien lorsqu'elle a été traitée.

6. **3 pt** Les évènements $(X_0 = 1)$ et $(X_2 = 1)$ sont-ils indépendants ?
   Question plus longue, non réussie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement « l'urne a toujours contenu, au moins deux boules vertes entre les tirages 0 et n »

7. **1 pt** Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que
$$A_{2n} = (X_0 = 2, X_1 = 3, X_2 = 2, \dots, X_{2n} = 2) \cup (X_0 = 3, X_1 = 2, X_2 = 3, \dots, X_{2n} = 3)\,.$$
   Des paraphrases pas toujours complètement convaincantes. Soignez l'explication car ici seul un détail en français était attendu.

8. **2,5 pt** En déduire $\mathbb{P}(A_{2n})$.
   Des éléments mais il manque parfois des éléments de justification : justifiez bien que l'union est disjointe, que vous utilisez la formule des probabilités composées que le passage de tel passé à tel présent retourne telle probabilité.

9. **0,5 pt** Préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_{2n})$.
   Peu traitée. Parfois avec une réponse fausse à la question précédente mais j'ai mis des points de cohérence.

Partie 2 : Une chaine de Markov **8 pt**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$a_n = \mathbb{P}(X_n = 0)\,, \quad b_n = \mathbb{P}(X_n = 1)\,, \quad c_n = \mathbb{P}(X_n = 2)\,, \quad d_n = \mathbb{P}(X_n = 3)\,.$$

On note également $U_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix}$.

10. **1 pt** Préciser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n + c_n + d_n$.
   A justifier avec un système complet. Je rappelle qu'un système complet d'évènements doit contenir **des évènements ! ! !** a_n, b_n, c_n et d_n sont des réels et ne forment donc pas un système complet d'évènements. De même plus haut dire (X_1, X_2) forme un système complet d'évènements n'a pas de sens car X_1 et X_2 ne sont pas des évènements mais des variables aléatoires.

11. **2 pt** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$b_{n+1} = a_n + \frac{2}{3}c_n.$$
   Quelques réponses correctes mais assez peu.

12. **1 pt** Exprimer de même pour tout $n \in \mathbb{N}$, sans justification, a_{n+1}, c_{n+1} et d_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n et d_n.
   Un ensemble de réponses correctes.

13. **1 pt** En déduire une matrice M que l'on précisera telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = MU_n$.
   Bien lorsqu'elle a été abordée.

14. **3 pt** Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$ en fonction de a_n et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n \geqslant 1) \neq 0$.
   Deux ou trois belles réponses.

Partie 3 : Probabilité de survivre $\boxed{18 \text{ pt}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_n \geqslant 1)$ et B_n l'évènement « l'urne a toujours contenu, y compris initialement, au moins une boule verte ». Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

15. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que $p_n = \frac{b_n}{1-a_n}$.
 Quelques bonnes réponses.
16. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Exprimer B_n à l'aide des X_k.
 Bien dans l'ensemble.
17. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(X_{k+1} \geqslant 1, X_k \geqslant 1) = \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_k = 1) + \mathbb{P}(X_k = 2) + \mathbb{P}(X_k = 3).$$
 Moins abordée.
18. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, une expression de $\mathbb{P}(X_{k+1} \geqslant 1, X_k \geqslant 1)$ en fonction uniquement de $\mathbb{P}(X_k \geqslant 1)$ et $\mathbb{P}(X_k = 1)$.
 Très peu traitée.
19. $\boxed{3 \text{ pt}}$ Montrer alors que
$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{3}{4}\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{3}p_k\right).$$
 Non abordée.
20. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
 Facile mais très peu traitée.
21. $\boxed{2 \text{ pt}}$ On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{3}{7}$. Quelle est la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} p_n$?
 Facile ! Mais peu abordée.
22. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire que $(-\ln(\mathbb{P}(B_n)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
 Non traitée.
23. $\boxed{1 \text{ pt}}$ Conclure en donnant $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.
 Non traitée.

Problème II - Représentation matricielle $\boxed{43 \text{ pt}}$

L'objectif de ce problème est de démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{3}{7}$, *où p_n a été défini dans le problème précédent. Ce problème peut néanmoins être traité de façon indépendante au problème 1.*

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par
$$\forall P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X], \quad f(P) = a_1 + (3a_0 + 2a_2)X + (2a_1 + 3a_3)X^2 + a_2X^3.$$

On note $\mathscr{C} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Partie 1 : Autour de f et A $\boxed{14 \text{ pt}}$

1. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
 Question élémentaire malheureusement elle pose encore des difficultés à certains d'entre vous.

2. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)$.
   Bizarrement mieux réussie. Question incontournable.

3. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Calculer le rang de A.
   Plusieurs méthodes faites avec succès. Le plus rapide en général reste les opérations élémentaires.

4. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
   Découlait presque directement de la question précédente. Certains ont fait plus long mais l'ont réussie.

5. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A - I_4)$ et $\mathrm{Ker}\,(A + I_4)$ sont en somme directe.
   Bien entendu on préférait sans la question suivante mais cela marchait quand même. Quelques belles réponses.

6. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Calculer $\mathrm{Ker}\,(A - I_4)$ et $\mathrm{Ker}\,(A + I_4)$.
   Plutôt bien dans l'ensemble. Certains confondent encore malgré tout vecteur de $\mathbb{R}_3[X]$ et vecteur de $\mathbb{R}^4$.

7. $\boxed{1 \text{ pt}}$ Quelle est la dimension de $F = \mathrm{Ker}\,(A - I_4) + \mathrm{Ker}\,(A + I_4)$?
   Facile. La moitié des réponses sont correctes et l'autre à bien revoir.

8. $\boxed{1 \text{ pt}}$ Préciser $\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}\right)$ et $\mathrm{Ker}\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}\right)$.
   Facile et finalement pas toujours résolue.

Partie 2 : Diagonalisation $\boxed{16 \text{ pt}}$

Soit P_1 le polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(P_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. On pose également $X_1 = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(P_1)$, $P_2 = 1 - 3X + 3X^2 - X^3$, $P_3 = 1 + X - X^2 - X^3$ et $P_4 = 1 - X - X^2 + X^3$ et enfin $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$.

9. $\boxed{1 \text{ pt}}$ Calculer AX_1.
   Sans difficulté.

10. $\boxed{1 \text{ pt}}$ Préciser P_1 et $f(P_1)$.
    On pouvait s'aider de la question précédente ou calculer directement $f(P_1)$ mais dans ce cas, faites apparaitre vos calculs !

11. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Justifier que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.
    Plusieurs méthodes ont été présentées avec succès. Question incontournable également.

12. $\boxed{1 \text{ pt}}$ Préciser $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$ et justifier sans calcul que P est inversible.
    Certains l'avaient faite à la question précédente. Bien dans l'ensemble, quelques confusions persistent.

13. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Préciser $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.
    Peu traitée ou réussie. Pas si dure, à retravailler.

14. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Calculer P^{-1}.
    Aaaaaaaa il a piqué ce pivot !!! Bienvenu dans la vraie vie, des calculs plus importants que des pivots $2x2$ ça existe... Y compris au concours !

15. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Exprimer pour tout $i \in [\![1;4]\!]$, $f(P_i)$ en fonction de P_i. *On pourra utiliser les résultats de la question 8.*

    Personne n'a utilisé la question 8. mais plusieurs bonnes réponses malgré tout, souvent par du calcul direct.

16. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire sans calcul $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

    Bien dans l'ensemble ! Vous avez bien compris ce type de question.

17. $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Préciser le lien entre A, D et P.

    Cadeau !

18. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ **Déduire** de la question précédente A^{-1}. *On explicitera les coefficients de la matrice.*

    Pas de réponse complète car il vous manquait P^{-1}. Des éléments corrects pour quelques-uns mais des confusions pour d'autres.

Partie 3 : Calcul de p_n $\boxed{\textbf{13 pt}}$

On définit pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $g(M) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} b & 3a+2c \\ 2b+3d & c \end{pmatrix}$. On admet que $g \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$. On note $\mathscr{C}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On pose enfin

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

19. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Calculer $A' = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}'}(g)$.

    Assez bien.

20. $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Donner le lien entre A' et A. Peut-on en déduire que $g = \frac{1}{3}f$?

    Pas très dure. Certains l'ont comprise d'autre non.

21. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ A l'aide de la question 17., montrer qu'il existe $\mathscr{B}'$ une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que $D' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(g)$.

    Question plus subtile. Une ou deux belles réponses.

22. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Calculer $U = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u)$.

    Une bonne réponse.

23. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(g^n(u))$.

    Peu traitée.

24. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = g^n(u)$.

    Non traitée.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ et on pose $p_n = \frac{b_n}{1-a_n}$.

25. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{3}{7}$.

    Non traitée.

La matrice A' est la matrice de transition associée à la chaîne de Markov du problème 1. U représente la distribution uniforme initiale et donc $g^n(u)$ correspond à la matrice donnant les probabilités de présence dans chaque état à l'étape n : a_n, b_n, c_n et d_n, d'où on en déduit p_n. Pour calculer $g^n(u)$ on fait appel à l'algèbre linéaire pour changer de base/diagonaliser afin d'accéder facilement aux puissances. Je sais. Vous êtes comme moi, béat d'admiration face à la beauté et la puissance des mathématiques.