Corrigé du Devoir Surveillé 9
Probabilités et représentation matricielle

Problème I - Probabilités

Une urne contient trois boules, de couleur rouge ou verte. On pioche successivement une boule dans l'urne avec le protocole suivant :

- si la boule piochée est verte, on la remplace par une boule rouge,
- si la boule piochée est rouge, on la remplace par une boule verte.

L'urne contient donc toujours à chaque étape trois boules, de couleur verte ou rouge.
On se munit d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ sur lequel sera défini toutes les variables aléatoires. On remplit l'urne initialement avec X_0 boules vertes et $3 - X_0$ boules rouges. On effectue ensuite les tirages et on note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k le nombre de boules de couleur verte dans l'urne juste après le tirage k.

Partie 1 : Application du cours

1. On suppose dans cette question que $X_0 = 0$.

   (a) Puisque $X_0 = 0$, cela signifie qu'initialement, l'urne contient 3 boules rouges et aucune boule verte. Au premier tirage on tire donc nécessairement une boule rouge que l'on remplace par une boule verte. Ainsi, X_1 est déterministe :
   $$\boxed{X_1 = 1.}$$

   (b) L'urne contient donc une boule verte et deux boules rouges. Deux cas :
   - on pioche une verte avec probabilité $1/3$, on obtient alors $X_2 = 0$,
   - on pioche une rouge avec probabilité $2/3$, on obtient alors $X_2 = 2$.

   Conclusion,
   $$\boxed{X_2(\Omega) = \{0; 2\}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{2}{3}.}$$

   (c) Posons $Y_2 = X_2/2$. Par la question précédente, on obtient $Y_2(\Omega) = \{0, 1\}$. Donc Y_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre
   $$\mathbb{P}(Y_2 = 1) = \mathbb{P}\left(\frac{X_2}{2} = 1\right) = \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{2}{3}.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{Y_2 \sim \mathscr{B}\left(\frac{2}{3}\right).}$$

On suppose maintenant que l'on tire un numéro X_0 dans $\{0, 1, 2, 3\}$ de façon équiprobable et on remplit alors initialement l'urne avec X_0 boules vertes et donc $3 - X_0$ boules rouges.

2. La famille $(X_0 = i)_{i \in [\![0;3]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,
   $$\mathbb{P}(X_1 = 2) = \sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(X_1 = 2 \mid X_0 = i)\, \mathbb{P}(X_0 = i).$$
   Or X_0 suit une loi uniforme sur $[\![0;3]\!]$ donc pour tout $i \in [\![0;3]\!]$, $\mathbb{P}(X_0 = i) = \frac{1}{4}$. De plus,

- Si $X_0 = 0$, alors il est impossible d'avoir $X_1 = 2$, $\mathbb{P}\left(X_1 = 2 \mid X_0 = 0 \right) = 0$.
- Si $X_0 = 1$, pour obtenir $X_1 = 2$, il faut avoir pioché une boule rouge, ce qui arrive $2/3$ car l'urne possède deux boules rouges et une boule verte. Donc $\mathbb{P}\left(X_1 = 2 \mid X_0 = 1 \right) = \frac{2}{3}$.
- De même, $\mathbb{P}\left(X_1 = 2 \mid X_0 = 2 \right) = 0$.
- Enfin, $\mathbb{P}\left(X_1 = 2 \mid X_0 = 3 \right) = 1$.

D'où,

$$\mathbb{P}\left(X_1 = 2\right) = 0 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + 0 + 1 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X_1 = 2\right) = \frac{5}{12}.}$$

3. En procédant de la même façon que dans la question précédente, on obtient,

$$\mathbb{P}\left(X_1 = 0\right) = \sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}\left(X_1 = 0 \mid X_0 = i \right) \mathbb{P}\left(X_0 = i\right) = 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + 0 + 0 = \frac{1}{12}$$

$$\mathbb{P}\left(X_1 = 1\right) = \sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}\left(X_1 = 1 \mid X_0 = i \right) \mathbb{P}\left(X_0 = i\right) = 1 \times \frac{1}{4} + 0 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + 0 = \frac{5}{12}.$$

$$\mathbb{P}\left(X_1 = 3\right) = \sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}\left(X_1 = 3 \mid X_0 = i \right) \mathbb{P}\left(X_0 = i\right) = 0 + 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + 0 + 0 = \frac{1}{12}.$$

Conclusion, $X_1(\Omega) = [\![0;3]\!]$ et sa loi est donnée par le tableau suivant :

i	0	1	2	3
$\mathbb{P}\left(X_1 = i\right)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

On pense bien à vérifier que $\sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}\left(X_1 = i\right) = 1$. *En effet,* $\frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = 1$ *OK !*

4. On cherche $\mathbb{P}\left(X_0 = 1 \mid X_1 = 2 \right)$. Puisque $\mathbb{P}\left(X_1 = 2\right) \neq 0$, par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}\left(X_0 = 1 \mid X_1 = 2 \right) = \frac{\mathbb{P}\left(X_1 = 2 \mid X_0 = 1 \right) \mathbb{P}\left(X_0 = 1\right)}{\mathbb{P}\left(X_1 = 2\right)}.$$

Par la question précédente, ou celle encore d'avant, on a $\mathbb{P}\left(X_1 = 2\right) = \frac{5}{12}$. De plus, $X_0 \sim \mathscr{U}\left([\![0;3]\!]\right)$ donc $\mathbb{P}\left(X_0 = 1\right) = \frac{1}{4}$. Enfin, si $(X_0 = 1)$, l'urne contient initialement 1 boule verte et 2 rouges. Pour obtenir deux vertes, il faut remplacer une rouge par une verte et donc avoir pioché une rouge. D'où,

$$\mathbb{P}\left(X_1 = 2 \mid X_0 = 1 \right) = \frac{2}{3}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X_0 = 1 \mid X_1 = 2 \right) = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}.}$$

5. Par la question précédente, $\mathbb{P}\left(X_0 = 1 \mid X_1 = 2 \right) = \frac{2}{5}$. D'autre part, $\mathbb{P}\left(X_0 = 1\right) = \frac{1}{4}$. Donc

$$\mathbb{P}\left(X_0 = 1 \mid X_1 = 2 \right) \neq \mathbb{P}\left(X_0 = 1\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{(X_0 = 1) \text{ et } (X_1 = 2) \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

6. On sait que $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \frac{1}{4}$. Calculons $\mathbb{P}(X_2 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_0 = 1, X_2 = 1)$. D'une part, $(X_1 = i)_{i \in [\![0;3]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = i)\, \mathbb{P}(X_1 = i).$$

Si $X_1 = 0$, alors nécessairement, on pioche une boule rouge et on obtient bien $X_2 = 1$. Donc $\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) = 1$. En procédant de même, on obtient,

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) = 1 \qquad \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = 0$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 2) = \frac{2}{3} \qquad \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 3) = 0.$$

Donc par la loi de X_1 donnée en question 3.

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = 1 \times \frac{1}{12} + 0 + \frac{2}{3} \times \frac{5}{12} + 0 = \frac{11}{36}.$$

De la même façon, $(X_1 = i)_{i \in [\![0;3]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X_2 = 1, X_0 = 1) = \sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = i, X_0 = 1).$$

Par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 0, X_0 = 1) &= \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0, X_0 = 1)\, \mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_0 = 1)\, \mathbb{P}(X_0 = 1) \\ &= 1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 1, X_0 = 1) = 0, \\ &\mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \\ &\mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 3, X_0 = 1) = 0. \end{aligned}$$

D'où,

$$\mathbb{P}(X_2 = 1, X_0 = 1) = \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{9} + 0 = \frac{7}{36}.$$

Or par ce qui précède, $\mathbb{P}(X_2 = 1)\, \mathbb{P}(X_0 = 1) = \frac{11}{36} \times \frac{1}{4} \neq \frac{7}{36}$. Donc

$$\mathbb{P}(X_2 = 1)\, \mathbb{P}(X_0 = 1) \neq \mathbb{P}(X_2 = 1, X_0 = 1).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les évènements } (X_0 = 1) \text{ et } (X_2 = 1) \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement « l'urne a toujours contenu, au moins deux boules vertes entre les tirages 0 et n »

7. Pour réaliser A_{2n}, il faut commencer par avoir au moins deux boules vertes initialement : $X_0 \in \{2, 3\}$. Premier cas, $X_0 = 2$. Au rang suivant on doit encore avoir $X_1 \geqslant 2$. Or si $X_0 = 2$, alors l'urne à l'étape suivante peut contenir 1 boule verte (on en a perdu une) ou 3 boules vertes (on en a gagné une). Donc pour que $X_1 \geqslant 2$, il faut $X_1 = 3$. Puis nécessairement $X_2 = 2$ et pour que $X_3 \geqslant 2$, il faudra $X_3 = 3$. Ainsi de suite. Donc si $X_0 = 2$, pour réaliser A_{2n}, il faudra réaliser $(X_1 = 3, X_2 = 2, \ldots, X_{2n} = 2)$. De même si $X_0 = 3$. On obtient donc

$$\boxed{A_{2n} = (X_0 = 2, X_1 = 3, X_2 = 2, \ldots, X_{2n} = 2) \cup (X_0 = 3, X_1 = 2, X_2 = 3, \ldots, X_{2n} = 3).}$$

8. Puisque $(X_0 = 2)$ et $(X_0 = 3)$ sont incompatibles, on en déduit que les deux évènements de la question précédente le sont également. Donc

$$\mathbb{P}(A_{2n}) = \underbrace{\mathbb{P}(X_0 = 2, X_1 = 3, X_2 = 2, \dots, X_{2n} = 2)}_{=P_1} + \underbrace{\mathbb{P}(X_0 = 3, X_1 = 2, X_2 = 3, \dots, X_{2n} = 3)}_{=P_2}.$$

Par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} P_1 =& \mathbb{P}(X_{2n} = 2 \mid X_{2n-1} = 3, \dots, X_0 = 2) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_2 = 2 \mid X_1 = 3, X_0 = 2) \\ & \times \mathbb{P}(X_1 = 3 \mid X_0 = 2)\, \mathbb{P}(X_0 = 2). \end{aligned}$$

On remplit l'urne initialement de façon uniforme : $\mathbb{P}(X_0 = 2) = \frac{1}{4}$. Sachant que l'urne contient 2 boules vertes, pour obtenir une boule verte supplémentaire il faut piocher l'unique boule rouge : $\mathbb{P}(X_1 = 3 \mid X_0 = 2) = \frac{1}{3}$. Sachant que $X_1 = 3$, nécessairement, $X_2 = 2$: $\mathbb{P}(X_2 = 2 \mid X_1 = 3) = 1$. Ainsi de suite :

$$P_1 = \underbrace{1 \times \frac{1}{3} \times \cdots \times 1 \times \frac{1}{3}}_{n \text{ fois}} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4 \times 3^n}.$$

De la même façon,

$$P_2 = \underbrace{\frac{1}{3} \times 1 \times \cdots \times \frac{1}{3} \times 1}_{n \text{ fois}} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4 \times 3^n}.$$

Conclusion,

$$\mathbb{P}(A_{2n}) = \frac{1}{4 \times 3^n} + \frac{1}{4 \times 3^n} = \frac{1}{2 \times 3^n}.$$

9. Puisque $3^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit directement que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_{2n}) = 0.}$$

Partie 2 : Une chaine de Markov

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \mathbb{P}(X_n = 0), \quad b_n = \mathbb{P}(X_n = 1), \quad c_n = \mathbb{P}(X_n = 2), \quad d_n = \mathbb{P}(X_n = 3).$$

On note également $U_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix}$.

10. Puisque que l'urne ne peut contenir que 0, 1, 2 ou 3 boules vertes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X_n = i)_{i \in [\![0;3]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Donc

$$\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = 3) = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n + b_n + c_n + d_n = 1.}$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(X_n = i)_{i \in [\![0;3]\!]}$ forme un système complet. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ &= \sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = i)\, \mathbb{P}(X_n = i) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0)\, a_n + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1)\, b_n \\ &\qquad + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2)\, c_n + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = i)\, d_n. \end{aligned}$$

Comme précédemment, on obtient,

$$b_{n+1} = a_n + 0 + \frac{2}{3}c_n + 0$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = a_n + \frac{2}{3}c_n.}$$

12. On obtient,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{b_n}{3} \\ b_{n+1} = a_n + \frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + d_n \\ d_{n+1} = \frac{c_n}{3}. \end{cases}}$$

13. D'après la question précédente, on a

$$U_{n+1} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_n}{3} \\ a_n + \frac{2}{3}c_n \\ \frac{2}{3}b_n + d_n \\ \frac{c_n}{3} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix}.$$

Conclusion, en posant $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}}$, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = MU_n.}$$

14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a directement

$$\mathbb{P}(X_n \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - a_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $b_n = \mathbb{P}(X_n = 1) \in [0; 1]$. Donc par la question 12.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{b_n}{3} \in \left[0; \frac{1}{3}\right].$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$. De plus, $X_0 \sim \mathscr{U}(⟦0; 3⟧)$ donc $a_0 = \frac{1}{4}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$. D'où,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_n \geqslant 1) = 1 - a_n \in \left[\frac{2}{3}; 1\right].$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_n \geqslant 1) = 1 - a_n \neq 0.}$$

Partie 3 : Probabilité de survivre

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_n \geqslant 1)$ et B_n l'évènement « l'urne a toujours contenu, y compris initialement, au moins une boule verte ». Soit $n \in \mathbb{N}$.

15. Par la question 14., $\mathbb{P}(X_n \geqslant 1) \neq 0$ donc p_n existe et par définition,

$$p_n = \mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_n \geqslant 1) = \frac{\mathbb{P}(X_n = 1, X_n \geqslant 1)}{\mathbb{P}(X_n \geqslant 1)}.$$

Or si l'évènement $(X_n = 1)$ est réalisé, alors $(X_n \geqslant 1)$ aussi nécessairement : $(X_n = 1) \subseteq (X_n \geqslant 1)$. Donc $(X_n = 1, X_n \geqslant 1) = (X_n = 1)$. Ainsi,

$$p_n = \frac{\mathbb{P}(X_n = 1)}{\mathbb{P}(X_n \geqslant 1)}.$$

Par définition de b_n et la question 14.

$$\boxed{p_n = \frac{b_n}{1 - a_n}.}$$

16. Pour réaliser B_n, il faut que l'urne ait à chaque étape k entre 0 et n contenu entre 1 et 3 boules vertes : $(X_k \geqslant 1)$. Pour réaliser tous ces évènements, on a donc

$$\boxed{B_n = \bigcap_{k=0}^{n} (X_k \geqslant 1).}$$

17. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La famille $(X_k = i)_{i \in [\![0;3]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{k+1} \geqslant 1, X_k \geqslant 1) &= \sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(X_{k+1} \geqslant 1, X_k \geqslant 1 \mid X_k = i)\, \mathbb{P}(X_k = i) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X_{k+1} \geqslant 1 \mid X_k = i)\, \mathbb{P}(X_k = i) \\ &= \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_k = 1) + 1 \times \mathbb{P}(X_k = 2) + 1 \times \mathbb{P}(X_k = 3). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(X_{k+1} \geqslant 1, X_k \geqslant 1) = \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_k = 1) + \mathbb{P}(X_k = 2) + \mathbb{P}(X_k = 3).}$$

18. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On sait que $\mathbb{P}(X_k \geqslant 1) = \mathbb{P}(X_k = 1) + \mathbb{P}(X_k = 2) + \mathbb{P}(X_k = 3)$. Donc

$$\mathbb{P}(X_k = 2) + \mathbb{P}(X_k = 3) = \mathbb{P}(X_k \geqslant 1) - \mathbb{P}(X_k = 1).$$

Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{k+1} \geqslant 1, X_k \geqslant 1) &= \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_k = 1) + \mathbb{P}(X_k = 2) + \mathbb{P}(X_k = 3) \\ &= \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_k = 1) + \mathbb{P}(X_k \geqslant 1) - \mathbb{P}(X_k = 1). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(X_{k+1} \geqslant 1, X_k \geqslant 1) = \mathbb{P}(X_k \geqslant 1) - \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_k = 1).}$$

19. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n}(X_k \geqslant 1)\right) && \text{par la question 16.}\\
&= \prod_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}\left(X_{k+1} \geqslant 1 \,\middle|\, \bigcap_{i=0}^{k}(X_i \geqslant 1)\right)\mathbb{P}(X_0 \geqslant 1) && \text{par la formule des probabilités composées}\\
&= \prod_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X_{k+1} \geqslant 1 \mid X_k \geqslant 1)\,\mathbb{P}(X_0 \geqslant 1) && \text{car } X_{k+1} \text{ ne dépend du passé qu'à travers } X_k\\
&= \frac{3}{4}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\mathbb{P}(X_{k+1} \geqslant 1, X_k \geqslant 1)}{\mathbb{P}(X_k \geqslant 1)} && \text{car } X_0 \sim \mathscr{U}(\llbracket 0;3 \rrbracket)\\
&= \frac{3}{4}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\mathbb{P}(X_k \geqslant 1) - \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_k = 1)}{\mathbb{P}(X_k \geqslant 1)} && \text{par la question précédente}\\
&= \frac{3}{4}\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\mathbb{P}(X_k = 1)}{\mathbb{P}(X_k \geqslant 1)}\right).
\end{aligned}$$

Or par définition, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$p_k = \mathbb{P}(X_k = 1 \mid X_k \geqslant 1) = \frac{\mathbb{P}(X_k = 1, X_k \geqslant 1)}{\mathbb{P}(X_k \geqslant 1)} = \frac{\mathbb{P}(X_k = 1)}{\mathbb{P}(X_k \geqslant 1)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(B_n) = \frac{3}{4}\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{3}p_k\right).}$$

20. Posons pour tout $x > -1$, $f(x) = x - \ln(1+x)$. La fonction f est bien définie et même dérivable sur $]-1;+\infty[$. De plus,

$$\forall x \in \,]-1;+\infty[\,, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Puisque $x > -1$, $1+x > 0$. Donc pour tout $x \in \,]-1;+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de x. De plus, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$, $f(0) = 0$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. D'où

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, pour tout $x > -1$, $f(x) \geqslant 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \,]-1;+\infty[\,, \quad \ln(1+x) \leqslant x.}$$

21. On admet que $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{7}$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} p_n \neq 0$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n$ diverge grossièrement. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \text{ diverge.}}$$

22. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}\left(X_k = 1 \mid X_k \geqslant 1\right) \in [0;1]$ en tant que probabilité. Donc $1 - \frac{1}{3}p_k \in \left[\frac{2}{3};1\right]$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 < \mathbb{P}\left(B_n\right) \leqslant \frac{3}{4} < 1.$$

Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\ln\left(\mathbb{P}\left(B_n\right)\right)$ existe et par la question 19.

$$-\ln\left(\mathbb{P}\left(B_n\right)\right) = -\ln\left(\frac{3}{4}\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{3}p_k\right)\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1 - \frac{1}{3}p_k\right).$$

Posons $x = -\frac{1}{3}p_k$. Puisque $1 - \frac{1}{3}p_k \in \left[\frac{2}{3};1\right]$, on a $x > -1$. Donc par la question précédente,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \ln\left(1 - \frac{1}{3}p_k\right) \leqslant -\frac{1}{3}p_k.$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad -\ln\left(1 - \frac{1}{3}p_k\right) \geqslant \frac{1}{3}p_k \geqslant 0.$$

Or par la question précédente, $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n$ diverge. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(-\ln\left(1 - \frac{1}{3}p_n\right)\right) \quad \text{diverge.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\ln\left(1 - \frac{1}{3}p_n\right) \geqslant 0$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} -\ln\left(1 - \frac{1}{3}p_n\right)$ étant à terme positif et divergeant, nécessairement, elle diverge vers $+\infty$ (par le théorème de convergence monotone : par positivité des termes généraux, la série est croissante). Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } \left(-\ln\left(\mathbb{P}\left(B_n\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ diverge vers } +\infty.}$$

23. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\left(B_n\right) = \mathrm{e}^{-\left(-\ln\left(\mathbb{P}\left(B_n\right)\right)\right)}.$$

Or par la question précédente, $-\ln\left(\mathbb{P}\left(B_n\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par composée de limite, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(B_n\right) = \mathrm{e}^{-(+\infty)} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(B_n\right) = 0.}$$

Problème II - Représentation matricielle

L'objectif de ce problème est de démontrer que $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{7}$*, où* p_n *a été défini dans le problème précédent. Ce problème peut néanmoins être traité de façon indépendante au problème 1.*

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par

$$\forall P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X], \quad f(P) = a_1 + (3a_0 + 2a_2)X + (2a_1 + 3a_3)X^2 + a_2X^3.$$

On note $\mathscr{C} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Partie 1 : Autour de f et A

1. Montrons que f est linéaire et va de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$. Par définition,
$$f(P) = a_1 + (3a_0 + 2a_2)X + (2a_1 + 3a_3)X^2 + a_2X^3 \in \mathbb{R}_3[X].$$
Donc f va bien de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors,
$$R = \lambda P + \mu Q = (\lambda a_0 + \mu b_0) + (\lambda a_1 + \mu b_1)X + (\lambda a_2 + \mu b_2)X^2 + (\lambda a_3 + \mu b_3)X^3.$$
Dès lors,
$$\begin{aligned} f(R) &= \lambda a_1 + \mu b_1 + (3(\lambda a_0 + \mu b_0) + 2(\lambda a_2 + \mu b_2))X \\ &\qquad + (2(\lambda a_1 + \mu b_1) + 3(\lambda a_3 + \mu b_3))X^2 + (\lambda a_2 + \mu b_2)X^3 \\ &= \lambda\left(a_1 + (3a_0 + 2a_2)X + (2a_1 + 3a_3)X^2 + a_2X^3\right) \\ &\qquad + \mu\left(b_1 + (3b_0 + 2b_2)X + (2b_1 + 3b_3)X^2 + b_2X^3\right) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q). \end{aligned}$$
Donc f est bien linéaire. Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{R}_3[X] \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_3[X].}$$

2. On a,
$$f(1) = 3X, \qquad f(X) = 1 + 2X^2, \qquad f\left(X^2\right) = 2X + X^3, \qquad f\left(X^3\right) = 3X^2.$$
Donc
$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f(1)) = \begin{bmatrix}0\\3\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f(X)) = \begin{bmatrix}1\\0\\2\\0\end{bmatrix}, \quad \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}\left(f\left(X^2\right)\right) = \begin{bmatrix}0\\2\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}\left(f\left(X^3\right)\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\3\\0\end{bmatrix}.$$
Conclusion,
$$\boxed{A = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

3. Les opérations élémentaires ne modifient pas le rang, donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\,(A) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} && C_1 \leftrightarrow C_2 \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} && C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} && C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2 \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} && C_4 \leftrightarrow C_4
\end{aligned}$$

La dernière matrice étant triangulaire avec des coefficients non nul sur la diagonale, on en déduit que

$$\boxed{\mathrm{rg}\,(A) = 4.}$$

4. Par la question précédente, on a $\mathrm{rg}\,(A) = 4$. Or $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ donc A est inversible. Or $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)$. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_3[X].}$$

5. Montrons que $\mathrm{Ker}\,(A - I_4) \cap \mathrm{Ker}\,(A + I_4) = \{0_{4,1}\}$. Soit $X \in \mathrm{Ker}\,(A - I_4) \cap \mathrm{Ker}\,(A + I_4)$. Alors,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} X \in \mathrm{Ker}\,(A - I_4) \\ X \in \mathrm{Ker}\,(A + I_4) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (A - I_4)\,X = 0_{4,1} \\ (A + I_4)\,X = 0_{4,1} \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} AX - X = 0_{4,1} \\ AX + X = 0_{4,1} \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} AX = X \\ AX = -X \end{cases} \\
&\Rightarrow X = -X \\
&\Rightarrow X = 0_{4,1}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}\,(A - I_4) \cap \mathrm{Ker}\,(A + I_4) \subseteq \{0_{4,1}\}$. L'inclusion réciproque étant aussi vraie, on en déduit que

$$\mathrm{Ker}\,(A - I_4) \cap \mathrm{Ker}\,(A + I_4) = \{0_{4,1}\}\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les espaces } \mathrm{Ker}\,(A - I_4) \text{ et } \mathrm{Ker}\,(A + I_4) \text{ sont en somme directe.}}$$

On pouvait aussi commencer par calculer les espaces en question même si cela empiète sur la question d'après.

6. Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
X \in \operatorname{Ker}(A - I_4) \quad & \Leftrightarrow \quad \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) X = 0_{4,1} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = 0_{4,1} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 2y - z + 3t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y = 0 \\ 2y + 2z = 0 \\ 2y - z + 3t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y = 0 \\ 2y + 2z = 0 \\ -3z + 3t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ -z + t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 \end{array} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ -z + t = 0 \end{cases} \qquad \text{car } L_4 = -L_3 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y = -t \\ y = -z = -t \\ z = t \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad X = \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \\ t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker}(A - I_3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

On pense à vérifier que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *OK !*

De même, pour $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
X \in \operatorname{Ker}(A + I_4) \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = 0_{4,1} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 2y + z + 3t = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ 2y + z + 3t = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ 3z + 3t = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -y = t \\ y = z = -t \\ z = -t \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad X = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ -t \\ t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(A - I_4) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad \operatorname{Ker}(A + I_4) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).}$$

On a également vérifié que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *OK !*

7. Soit $F = \operatorname{Ker}(A - I_4) + \operatorname{Ker}(A + I_4)$. Par la question 5. les espaces $\operatorname{Ker}(A - I_4)$ et $\operatorname{Ker}(A + I_4)$ sont en somme directe donc

$$\dim(F) = \dim(\operatorname{Ker}(A - I_4)) + \dim(\operatorname{Ker}(A + I_4)).$$

Posons $u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Par la question précédente, (u_1) engendre $\mathrm{Ker}\,(A - I_4)$ et est libre car composée d'un seul vecteur non nul. Donc (u_1) est une base de $\mathrm{Ker}\,(A - I_4)$. Donc

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\,(A - I_4)\right) = \mathrm{Card}\,((u_1)) = 1.$$

De même $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(A + I_4)\right) = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\dim(F) = 2.}$$

8. On sait que $\mathrm{Ker}\,(A - I_4) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. De plus f est canoniquement associé à A dans $\mathbb{R}_3[X]$. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}\right) = \mathrm{Vect}\left(-1 - X + X^2 + X^3\right) \text{ et } \mathrm{Ker}\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}\right) = \mathrm{Vect}\left(1 - X - X^2 + X^3\right).}$$

Partie 2 : Diagonalisation

Soit P_1 le polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(P_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. On pose également $X_1 = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(P_1)$, $P_2 = 1 - 3X + 3X^2 - X^3$, $P_3 = 1 + X - X^2 - X^3$ et $P_4 = 1 - X - X^2 + X^3$ et enfin $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$.

9. On a directement,

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{AX_1 = 3X_1.}$$

10. Puisque $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(P_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, on a directement $P_1 = 1 + 3X + 3X^2 + X^3$. De plus,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f(P_1)) = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(P_1) = AX_1 = 3X_1.$$

Conclusion,

$$\boxed{P_1 = 1 + 3X + 3X^2 + X^3, \quad \text{et} \quad f(P_1) = 3P_1.}$$

11. Plusieurs méthodes :

- on montre que $\mathscr{B}$ est libre et $\mathrm{Card}\,(\mathscr{B}) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$,
- on montre que $\mathscr{B}$ est génératrice et $\mathrm{Card}\,(\mathscr{B}) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$,

- on montre que $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$ est inversible,
- on montre que $\mathrm{rg}(\mathscr{B}) = 4 = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \dim(\mathbb{R}_3[X])$.

Montrons que $\mathscr{B}$ est libre et $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$ par exemple. Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4 = 0_{\mathbb{R}_3[X]}.$$

Alors,

$$a + 3aX + 3aX^2 + aX^3 + b - 3bX + 3bX^2 - bX^3 + c + cX - cX^2 - cX^3 + d - dX - dX^2 + dX^3 = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 3a-3b+c-d=0 \\ 3a+3b-c-d=0 \\ a-b-c+d=0 \end{cases}
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ -6b-2c-4d=0 \\ -4c-4d=0 \\ -2b-2c=0 \end{cases} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 3b+c+2d=0 \\ c+d=0 \\ b+c=0 \end{cases} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3 \\ L_4 \leftarrow -\frac{1}{2}L_4 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ b+c=0 \\ c+d=0 \\ 3b+c+2d=0 \end{cases} && L_2 \leftrightarrow L_3 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ b+c=0 \\ c+d=0 \\ -2c+2d=0 \end{cases} && L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ b+c=0 \\ c+d=0 \\ 4d=0 \end{cases} && L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3 \\
&\Leftrightarrow \quad a=b=c=d=0.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre. De plus, $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X].}$$

12. Par définition des polynômes P_i, on lit directement que

$$\boxed{P = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

De plus par la question précédente, $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Donc P est une matrice de passage entre deux bases. Nécessairement,

$$\boxed{P \text{ est inversible.}}$$

13. *Méthode 1.* Par la question 10., on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(f\left(P_1\right)\right) = 3X_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

De même,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(f\left(P_2\right)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(f\left(P_3\right)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(f\left(P_4\right)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\left(f\right) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 \\ 9 & 9 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Méthode 2. Posons $A' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\left(f\right)$. Par la formule de changement de base, on a $A' = \tilde{P}^{-1}A\tilde{Q}$, avec $\tilde{P} = P_{\mathscr{C},\mathscr{C}} = I_4$ et $\tilde{Q} = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(\mathscr{B}\right) = P$. Donc $\tilde{P}^{-1} = I_4$ et par la question précédente,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A' = \tilde{P}^{-1}A\tilde{Q} = AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 \\ 9 & 9 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\left(f\right) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 \\ 9 & 9 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

14. Allez c'est parti pour un pivot de Gauss ! On a les opérations élémentaires suivantes :

$$
\begin{array}{lll}
P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & & I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3 \\ L_4 \leftarrow -\frac{1}{2}L_4 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & L_4 \leftrightarrow L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} & L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_4 \leftarrow \frac{L_4 + 2L_3}{4} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} I_4 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Conclusion,

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}.$$

Vérification :

$$P^{-1}P = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = I_4 \ \textit{OK !}$$

Ouf, je n'avais pas envie de recommencer...

15. On observe que $P_3 = -\left(-1 - X + X^2 + X^3\right) \in \operatorname{Ker}\left(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}\right)$. Donc par la question 8. $f(P_3) = P_3$. De même, $P_4 \in \operatorname{Ker}\left(f + \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}\right)$. Donc $f(P_4) = -P_4$. De plus, par la question 10. $f(P_1) = 3P_1$. Enfin,
$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f(P_2)) = A \times \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix} = -3\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(P_2).$$
Donc $f(P_2) = -3P_2$. Conclusion,
$$\boxed{f(P_1) = 3P_1, \quad f(P_2) = -3P_2, \quad f(P_3) = P_3, \quad f(P_4) = -P_4.}$$

16. Par la question précédente $f(P_1) = 3P_1$. Donc $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f(P_1)) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. En procédant de même pour les autres vecteurs, on obtient,
$$\boxed{D = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

17. Puisque $A = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f)$, $D = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $P = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$, par la formule de changement de base,
$$\boxed{A = PDP^{-1} \quad \text{i.e.} \quad D = P^{-1}AP.}$$

18. On sait que P est inversible et donc P^{-1} existe et est aussi inversible. De plus, D est une matrice diagonale avec des coefficients diagonaux non nuls. Donc D est aussi inversible. Par produit, on retrouve que A est inversible et
$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \left(PDP^{-1}\right)^{-1} \\
&= \left(P^{-1}\right)^{-1} D^{-1} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{par la question 14.} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Vérification : $A^{-1}A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = I_4$ *OK !*

Partie 3 : Calcul de p_n

On définit pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $g(M) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} b & 3a+2c \\ 2b+3d & c \end{pmatrix}$. On admet que $g \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$. On note $\mathscr{C}' = (e_1', e_2', e_3', e_4') = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On pose enfin

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

19. On a $g(e_1') = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}'}(g(e_1')) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De même pour les autres vecteurs. D'où

$$\boxed{A' = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}'}(g) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

20. Par la question précédente, on a directement,

$$\boxed{A' = \frac{1}{3}A.}$$

Cependant g est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tandis que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Nécessairement,

$$\boxed{g \neq \frac{1}{3}f.}$$

21. Par la question 17. on observe que

$$A' = \frac{1}{3}A = \frac{1}{3}PDP^{-1} = PD'P^{-1}.$$

Ou encore $D' = P^{-1}A'P$. Or $A' = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}'}(g)$. Cherchons $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ telle que

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}'}(\mathscr{B}') = P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, $v_1 = e'_1 + 3e'_2 + 3e'_3 + e'_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. De même, pour v_2, v_3, v_4. Posons donc

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

et $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Alors, on observe bien que $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}'}(\mathscr{B}')$. Puisque P est inversible (question 12.), on en déduit que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, comme $D' = P^{-1}A'P$, avec $A' = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}'}(g)$ et $P = P_{\mathscr{C}', \mathscr{B}'}$, on en déduit par la formule de changement de base que

$$\boxed{D' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(g), \qquad \text{avec } \mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right).}$$

22. Posons $V = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}'}(u)$ et $U = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u)$. On a $V = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Par la formule de changement de base pour un vecteur ($X = PX'$), on a

$$\begin{aligned} V = PU \qquad \Leftrightarrow \qquad U = P^{-1}V &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{par la question 14.} \\ &= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{U = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.}$$

23. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $U_n = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(g^n(u))$. Alors,

$$\begin{aligned} U_n &= \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(g^n)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u) \quad \text{par la formule } Y = AX \\ &= \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(g)^n\, U \\ &= (D')^n\, U \quad \text{par la question 21.} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n/3^n \end{pmatrix} \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{car } D' \text{ est diagonale} \\ &= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ (-1)^n/3^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ (-1)^n/3^n \end{bmatrix}.}$$

24. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $U_n = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}\left(g^n\left(u\right)\right)$. Par la question précédente, on obtient,

$$\begin{aligned} g^n\left(u\right) &= \frac{1}{8}v_1 + \frac{(-1)^n}{8 \times 3^n}v_4 \\ &= \frac{1}{8}\left(\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix} + \frac{(-1)^n}{3^n}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 + \frac{(-1)^n}{3^n} & 3 - \frac{(-1)^n}{3^n}\\ 3 - \frac{(-1)^n}{3^n} & 1 + \frac{(-1)^n}{3^n}\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad g^n\left(u\right) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 + \frac{(-1)^n}{3^n} & 3 - \frac{(-1)^n}{3^n}\\ 3 - \frac{(-1)^n}{3^n} & 1 + \frac{(-1)^n}{3^n}\end{pmatrix}.}$$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$ et on pose $p_n = \frac{b_n}{1-a_n}$.

25. Par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \frac{3^n+(-1)^n}{8\times 3^n}$ et $b_n = \frac{3^{n+1}+(-1)^{n+1}}{8\times 3^n}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \frac{\frac{3^{n+1}+(-1)^{n+1}}{8\times 3^n}}{1 - \frac{3^n+(-1)^n}{8\times 3^n}} = \frac{3^{n+1} + (-1)^{n+1}}{8 \times 3^n - 3^n + (-1)^n} = \frac{3^{n+1} + (-1)^{n+1}}{7 \times 3^n + (-1)^n}.$$

Or $(-1)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\ll} 3^{n+1}$ et $(-1)^n \underset{n\to+\infty}{\ll} 7 \times 3^n$. Donc

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3^{n+1}}{7 \times 3^n} = \frac{3}{7}.$$

Conclusion, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{7}.}$$

La matrice A' est la matrice de transition associée à la chaîne de Markov du problème 1. U représente la distribution uniforme initiale et donc $g^n(u)$ correspond à la matrice donnant les probabilités de présence dans chaque état à l'étape n : a_n, b_n, c_n et d_n, d'où on en déduit p_n. Pour calculer $g^n(u)$ on fait appel à l'algèbre linéaire pour changer de base/diagonaliser afin d'accéder facilement aux puissances. Je sais. Vous êtes comme moi, béat d'admiration face à la beauté et la puissance des mathématiques.