Correction de l'interrogation 0
Révisions de calculs

1. Simplifier $A = \dfrac{\dfrac{5}{7} - \dfrac{3}{4}}{\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{20} - \dfrac{5}{28}}$.

   Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$A = \frac{\dfrac{20-21}{28}}{\dfrac{5+2}{40} - \dfrac{5}{28}} = \frac{-\dfrac{1}{28}}{\dfrac{7\times 7 - 50}{280}} = -\frac{1}{28} \times \frac{280}{49-50} = 10.$$

   Conclusion,

$$\boxed{A = 10.}$$

2. Simplifier $B = \dfrac{8^2 \times 27 \times 175}{12^3 \times \frac{1}{7} \times 245}$.

   Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$B = \frac{\left(2^3\right)^2 \times 3^3 \times 5 \times 35}{4^3 \times 3^3 \times \frac{1}{7} \times 5 \times 49} = \frac{2^6 \times 3^3 \times 5^2 \times 7}{2^6 \times 3^3 \times \frac{1}{7} \times 5 \times 7^2} = 5.$$

   Conclusion,

$$\boxed{B = 5.}$$

3. Simplifier $C = \dfrac{\dfrac{3}{2}\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt[5]{243}}} + \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

   Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
C &= \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{\sqrt[5]{9\times 27}}} + \frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)} \\
&= \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{\sqrt[5]{3^2\times 3^3}}} + \frac{5-\sqrt{15}}{5-3} \\
&= \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{\sqrt[5]{3^5}}} + \frac{5-\sqrt{15}}{2} \\
&= \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} + \frac{5-\sqrt{15}}{2} \\
&= \frac{3\sqrt{15}}{2\times 3} + \frac{5-\sqrt{15}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{15}}{2} + \frac{5-\sqrt{15}}{2} \\
&= \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{C = \frac{5}{2}.}$$

4. Simplifier $D = \sqrt{\dfrac{135^{3/2} \times 5^{3/2} \times \sqrt{3}^9}{3 \times 27^2}}$.

Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
D &= \sqrt{\frac{(5\times 27)^{3/2}\times 5^{3/2}\times 3^{9/2}}{3\times (3^3)^2}}\\
&= \sqrt{\frac{\left(5\times 3^3\right)^{3/2}\times 5^{3/2}\times 3^{9/2}}{3^7}}\\
&= \sqrt{\frac{5^{3/2}\times 3^{9/2}\times 5^{3/2}\times 3^{9/2}}{3^7}}\\
&= \sqrt{\frac{5^3\times 3^9}{3^7}}\\
&= \sqrt{5^3\times 3^2}\\
&= 5\times 3\times\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{D = 15\sqrt{5}.}$$

5. Simplifier $E = (\ln(196))^2 - \ln(49)\ln\left(16^2\right)$.
Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
E &= (\ln(2\times 98))^2 - 2\ln\left(7^2\right)\ln(16)\\
&= \left(\ln\left(2^2\times 49\right)\right)^2 - 4\ln(7)\ln\left(2^4\right)\\
&= \left(\ln\left(2^2\times 7^2\right)\right)^2 - 16\ln(7)\ln(2)\\
&= (2\ln(2) + 2\ln(7))^2 - 16\ln(7)\ln(2)\\
&= 4(\ln(2))^2 + 8\ln(2)\ln(7) + 4(\ln(7))^2 - 16\ln(7)\ln(2)\\
&= 4(\ln(2))^2 - 8\ln(2)\ln(7) + 4(\ln(7))^2\\
&= 4\left[(\ln(2))^2 - 2\ln(2)\ln(7) + (\ln(7))^2\right]\\
&= 4[\ln(2) - \ln(7)]^2.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{E = 4[\ln(2) - \ln(7)]^2.}$$

6. Soit $x\in\mathbb{R}$. Simplifier et mettre sous forme factorisée $F = \dfrac{\mathrm{e}^{4x} + 2\,\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x)^2}$.
Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^x + 1\right)}{\mathrm{e}^{2x}} &&= \mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^x + 1\\
&= (\mathrm{e}^x)^2 + 2\,\mathrm{e}^x + 1\\
&= (\mathrm{e}^x + 1)^2.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{F = (\mathrm{e}^x + 1)^2.}$$

7. Soit $x\in\mathbb{R}$. Développer $G = (3x-1)^2(3x+1)^2$.
Solution. En reconnaissant une identité remarquable, on a les égalités entre réels suivantes :

$$G = \left(9x^2 - 1\right)^2 = 81x^4 - 18x^2 + 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{G = 81x^4 - 18x^2 + 1.}$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser au maximum $H = (2x+1)(x-14) - 6x - 3 + (10x+5)(3-x)$.
Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} H &= (2x+1)(x-14) - 6x - 3 + (10x+5)(3-x) \\ &= (2x+1)(x-14) - 3(2x+1) + 5(2x+1)(3-x) \\ &= (2x+1)(x-14-3+5(3-x)) \\ &= (2x+1)(x-14-3+15-5x) \\ &= (2x+1)(-4x-2) \\ &= -2(2x+1)(2x+1). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{H = -2(2x+1)^2.}$$

9. Déterminer le domaine de dérivabilité puis dériver $f : x \mapsto \dfrac{x^6}{x^2+x+3}$.
Solution. Soit Δ le discriminant de x^2+x+3. On a $\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$. Donc $x \mapsto x^2+x+3$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction f est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{6x^5\left(x^2+x+3\right) - x^6(2x+1)}{\left(x^2+x+3\right)^2} = \frac{x^5\left(6x^2+6x+18-2x^2-x\right)}{\left(x^2+x+3\right)^2} = \frac{x^5\left(4x^2+5x+18\right)}{\left(x^2+x+3\right)^2}.$$

Conclusion, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{x^5\left(4x^2+5x+18\right)}{\left(x^2+x+3\right)^2}.}$$

10. Déterminer le domaine de dérivabilité puis dériver $g : x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(\ln(x))}$.
Solution. Seule la fonction ln pose problème. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\ln(x) \text{ existe} \qquad \Leftrightarrow \qquad x > 0.$$

Donc g est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g'(x) = (\sin(\ln(x)))' \,\mathrm{e}^{\sin(\ln(x))} = (\ln(x))' \cos(\ln(x))\,\mathrm{e}^{\sin(\ln(x))} = \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,\mathrm{e}^{\sin(\ln(x))}.$$

Conclusion, $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g'(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,\mathrm{e}^{\sin(\ln(x))}.}$$