Correction de l'interrogation 10
Equations différentielles d'ordre 1.

1. (a) Enoncer le principe de superposition.
Solution. Soient I un intervalle, a, b_1 et b_2 trois fonctions continues sur I, y_1 une solution de

$$(E_1) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b_1(x)$$

et y_2 une solution de

$$(E_2) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b_2(x).$$

Alors, $y_1 + y_2$ est une solution de

$$(E) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b_1(x) + b_2(x)$$

(b) Définir un problème de Cauchy.
Solution. Soient I un intervalle, a et b deux fonctions continues sur I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ alors le problème suivant d'inconnue y une fonction dérivable sur I est un problème de Cauchy

$$(\mathscr{P}) \begin{cases} \forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

(c) Enoncer la formule de Moivre.
Solution. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

2. Déterminer les intervalles de résolution puis sur l'un d'eux, déterminer $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E) : $\ln(t)y(t) + t\ln^4(t)(y'(t)+1) = 0$ d'inconnue y une fonction dérivable.
Solution. L'équation (E) n'est définie que pour $t > 0$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(E) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad t\ln^4(t)y'(t) + \ln(t)y(t) = -t\ln^4(t).$$

Or pour $t > 0$, $t\ln^4(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Donc les intervalles de résolution de (E) sont

$$\boxed{I_1 =]0;1[\qquad \text{et} \qquad I_2 =]1;+\infty[.}$$

Fixons alors $I = I_2$ par exemple. Dès lors,

$$\forall t \in I, \qquad y'(t) + \frac{1}{t\ln^3(t)}y(t) = -1.$$

L'équation homogène associée est alors donnée par

$$(E_0) \qquad : \qquad \forall t \in I, \qquad y'(t) + \frac{1}{t\ln^3(t)}y(t) = 0.$$

Posons $a : t \mapsto \frac{1}{t\ln^3(t)}$. La fonction a est continue sur I donc admet des primitives. On reconnaît une fonction de la forme $\frac{u'}{u^3}$ avec $u : t \mapsto \ln(t)$ donc une primitive de a sur I est donnée par

$$A : \qquad t \mapsto -\frac{1}{2u^2(t)} = -\frac{1}{2\ln^2(t)}.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E_0) sur $I =]1;+\infty[$ est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \text{Vect}\left(\begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{\frac{1}{2\ln^2(t)}} \end{array}\right) = \left\{\begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & C\,e^{\frac{1}{2\ln^2(t)}} \end{array} \middle| C \in \mathbb{R}\right\}.}$$

3. Justifier que l'équation $(E) : y'(x) - \frac{2x}{1+x^2}y(x) = \arctan(x)$ admet des solutions sur $I = \mathbb{R}$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto 1 + x^2$ est une solution de l'équation homogène associée.
Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$ donc les fonctions $a : x \mapsto -\frac{2x}{1+x^2}$ et $x \mapsto \arctan(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Donc $\boxed{(E) \text{ admet des solutions sur } \mathbb{R}}$.

Posons $y_0 : x \mapsto 1 + x^2$, y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda(x) = \frac{y(x)}{y_0(x)}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_0(x) \neq 0$. La fonction λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas et l'on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) - \frac{2x}{1+x^2}y(x) = \arctan(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)y_0(x) + \underbrace{\lambda(x)y_0'(x) - \frac{2x}{1+x^2}\lambda(x)y_0(x)}_{=0 \text{car } y_0 \text{ solution de l'équation homogène}} = \arctan(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)y_0(x) = \arctan(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)\left(1+x^2\right) = \arctan(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \frac{\arctan(x)}{1+x^2} = \arctan'(x)\arctan(x) \qquad \text{car } 1+x^2 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda(x) = \frac{\arctan^2(x)}{2} + C \\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda(x)y_0(x) = \left(\frac{\arctan^2(x)}{2} + C\right)\left(1+x^2\right).
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(\frac{\arctan^2(x)}{2} + C\right)\left(1+x^2\right) \end{array} \middle| \ C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

4. Justifier que $f : x \mapsto \frac{2x-3}{x^2-4x+3}$ admet des primitives sur $]3;+\infty[$ et les déterminer.
Solution. Soit Δ le discriminant de $x^2 - 4x + 3$. On a $\Delta = 16 - 12 = 4$. Donc les racines associées sont $\frac{4-2}{2} = 1$ et $\frac{4+2}{2} = 3$. Donc pour tout $x \in]3;+\infty[$, on a $x^2 - 4x + 3 > 0$ et f est continue sur $]3;+\infty[$ et $\boxed{\text{admet donc des primitives sur }]3;+\infty[}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2x-3}{x^2-4x+3} \\
&= \frac{2x-4}{x^2-4x+3} + \frac{1}{x^2-4x+3} \\
&= \frac{2x-4}{x^2-4x+3} + \frac{1}{(x-1)(x-3)} \\
&= \frac{2x-4}{x^2-4x+3} + \frac{1/2}{x-3} - \frac{1/2}{x-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, une primitive F de f est donnée pour tout $x \in]3;+\infty[$ par

$$F(x) = \ln\left(\left|x^2-4x+3\right|\right) + \frac{1}{2}\ln\left(|x-3|\right) - \frac{1}{2}\ln\left(|x-1|\right) = \ln\left(\frac{\left(x^2-4x+3\right)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}\right).$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de f est donnée par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l}]3;+\infty[\to \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto \ln\left(\frac{\left(x^2-4x+3\right)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}\right) + C \end{array} \middle| \ C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

5. Justifier que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,\mathrm{d}t$ existe et calculer I à l'aide d'un changement de variable.

Solution. La fonction $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{t+1}$ est continue sur $[0;1]$. Donc $\boxed{I \text{ existe}}$. Posons pour tout $t \in [0;1]$, $s = \sqrt{t}$ alors $t = s^2$. Si $t = 0$, $s = 0$. Si $t = 1$, $s = 1$. La fonction $s \mapsto s^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et $\mathrm{d}t = 2s\,\mathrm{d}s$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
I = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{s}{s^2+1} 2s\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 \frac{2s^2}{s^2+1}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 2 - \frac{2}{s^2+1}\,\mathrm{d}s \\
&= [2s - 2\arctan(s)]_{s=0}^{s=1} \\
&= 2 - 2\arctan(1) - 0 \\
&= 2 - \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I = 2 - \frac{\pi}{2}.}$$