Correction de l'interrogation 11
Equations différentielles d'ordre 2.

1. (a) Donner la définition d'une partie majorée, minorée, bornée.
Solution. Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On a les définitions suivantes :

$$\begin{array}{ccl} A \text{ est majorée} & \Leftrightarrow & \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\quad x \leqslant M \\ A \text{ est minorée} & \Leftrightarrow & \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\quad m \leqslant x \\ A \text{ est bornée} & \Leftrightarrow & \exists (M,m) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in A,\quad m \leqslant x \leqslant M. \end{array}$$

(b) Donner la définition d'un maximum, d'un minimum d'une partie.
Solution. Soient $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ et $(m,M) \in \mathbb{R}^2$. On a les définitions suivantes :

$$\begin{array}{ccccl} m = \min(A) & \Leftrightarrow & m \in A & \text{et} & \forall x \in A,\quad m \leqslant x \\ M = \max(A) & \Leftrightarrow & M \in A & \text{et} & \forall x \in A,\quad x \leqslant M. \end{array}$$

(c) Donner la somme des premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes.
Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+1| \leqslant |2x-1|+1$.
Solution. Soient $x \in \mathbb{R}$ et (E) : $|x+1| \leqslant |2x-1|+1$. On a d'une part $x+1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$ et d'autre part $2x-1 \geqslant 0 \iff x \geqslant \frac{1}{2}$.
Premier cas. Si $x \leqslant -1$, alors on a les équivalences suivantes :

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad -x-1 \leqslant 1-2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant 3,$$

ce qui est le cas lorsque $x \leqslant -1$. Dans ce cas on obtient l'ensemble solution suivant : $\mathscr{S}_1 =]-\infty;-1[$.
Deuxième cas. Si $x \in \left[-1;\frac{1}{2}\right]$, alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad x+1 \leqslant 1-2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{1}{3}.$$

Ainsi, dans ce cas, on obtient l'ensemble solution suivant : $\mathscr{S}_2 = \left[-1;\frac{1}{3}\right]$.
Troisième cas. Si $x \geqslant \frac{1}{2}$, alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad x+1 \leqslant 2x-1+1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant x.$$

Dans ce cas, on obtient l'ensemble solution suivant : $\mathscr{S}_3 = [1;+\infty[$.
Conclusion, l'ensemble solution de l'inéquation (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 \cup \mathscr{S}_3 = \left]-\infty;\frac{1}{3}\right] \cup [1;+\infty[\,.}$$

3. Déterminer les solutions de l'équation $(\mathscr{P})$ suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathscr{P}) \qquad \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + y'(t) + y(t) = 0 & (E_0) \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Solution. Soit (E_c) l'équation caractéristique associée à (E_0). On a (E_c) : $r^2+r+1=0$. On sait que les solutions de (E_c) sont les racines troisièmes de l'unité différentes de 1 i.e.

$$r_1 = j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad r_2 = j^2 = \bar{j} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc l'ensemble des solutions de (E_0) est donné par

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \end{array} \middle| (A,B)\in\mathbb{R}^2 \right\}.$$

On a donc les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & y \text{ solution de } (\mathscr{P}) \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \exists\,(A,B)\in\mathbb{R}^2,\ \forall t\in\mathbb{R}, \quad y(t) = \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \\ 0 = y(0) = A \\ \frac{1}{2} = y'(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}B\cos(0)\,\mathrm{e}^0 - \frac{B}{2}\sin(0)\,\mathrm{e}^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}B \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \exists\,(A,B)\in\mathbb{R}^2,\ \forall t\in\mathbb{R}, \quad y(t) = \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \\ A = 0 \\ B = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion, on trouve bien une unique solution à notre problème de Cauchy $(\mathscr{P})$, donnée par

$$\boxed{y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}. \end{array}}$$

4. Déterminer UNE solution de l'équation $(E) : \forall t\in\mathbb{R},\ y''(t) + y'(t) - 2y(t) = t\,\mathrm{e}^t$.
Solution. L'équation caractéristique associée à (E) est donnée par

$$(E_c) \ : \qquad r^2 + r - 2 = 0.$$

Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta = 1+8 = 9$. Donc les solutions de (E_c) sont $\frac{-1+3}{2} = 1$ et $\frac{-1-3}{2} = -2$. On note donc que 1 est une racine simple de (E_c). En conséquence, on pose $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et

$$y_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t\,(at+b)\,\mathrm{e}^t = \left(at^2+bt\right)\mathrm{e}^t. \end{array}$$

La fonction y_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} &\forall t\in\mathbb{R}, \qquad y_p'(t) = \left(2at + b + at^2 + bt\right)\mathrm{e}^t = \left(at^2 + (2a+b)\,t + b\right)\mathrm{e}^t \\ &\forall t\in\mathbb{R}, \qquad y_p''(t) = \left(2at + 2a + b + at^2 + (2a+b)\,t + b\right)\mathrm{e}^t = \left(at^2 + (4a+b)\,t + 2a + 2b\right)\mathrm{e}^t. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} & y_p \text{ solution de } (E) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t\in\mathbb{R}, \qquad \left((a+a-2a)\,t^2 + (4a+b+2a+b-2b)\,t + 2a+2b+b\right)\mathrm{e}^t = t\,\mathrm{e}^t \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t\in\mathbb{R}, \qquad (6at + 2a + 3b)\,\mathrm{e}^t = t\,\mathrm{e}^t \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t\in\mathbb{R}, \qquad 6at + 2a + 3b = t \qquad\qquad \text{car } \mathrm{e}^t \neq 0. \end{aligned}$$

On note alors qu'il suffit de prendre

$$\begin{cases} 6a = 1 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{-2}{3}a = -\frac{1}{9}. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } y_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{3t^2-2t}{18}\,\mathrm{e}^t \end{array} \text{ est une solution de } (E).}$$

5. Calculer un équivalent simple en $+\infty$ de $f : x \mapsto \frac{x + \ln\left(\mathrm{e}^{x^2}+2\right) + \sin^5(x)}{\sqrt{x^4+2}}$.
Solution. Puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, on a donc $-1 \leqslant \sin^5(x) \leqslant 1$. Donc pour tout $x > 0$,

$$-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin^5(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x}=0$. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin^5(x)}{x}=0.$$

Autrement dit, $\sin^5(x)\underset{x\to+\infty}{=}o(x)$. De plus,

$$\forall x>0,\qquad \ln\left(\mathrm{e}^{x^2}+2\right)=\ln\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)+\ln\left(1+2\,\mathrm{e}^{-x^2}\right)=x^2+\ln\left(1+2\,\mathrm{e}^{-x^2}\right).$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2\,\mathrm{e}^{-x^2}\right)=0$, on en déduit que $\ln\left(1+2\,\mathrm{e}^{-x^2}\right)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(x^2\right)$. On a également $x\underset{x\to+\infty}{=}o\left(x^2\right)$ et donc également $\sin^5(x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(x^2\right)$. Ainsi,

$$x+\ln\left(\mathrm{e}^{x^2}+2\right)+\sin^5(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}x^2.$$

Egalement, on a $x^4+2\underset{x\to+\infty}{\sim}x^4$ donc par passage à la puissance $1/2$, $\sqrt{x^4+2}\underset{x\to+\infty}{\sim}x^2$. Finalement, par quotient,

$$f(x)=\frac{x+\ln\left(\mathrm{e}^{x^2}+2\right)+\sin^5(x)}{\sqrt{x^4+2}}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}1.}$$