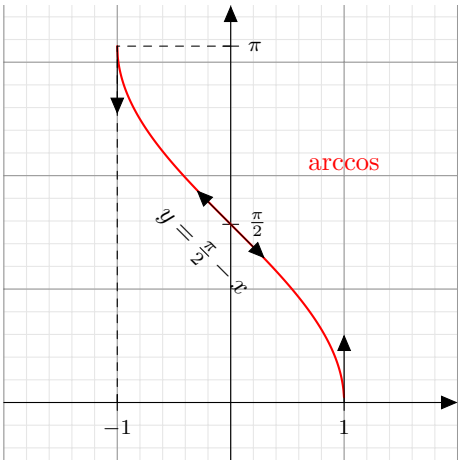
Correction de l'interrogation 12
Calcul dans R

1. (a) Donner la définition d'un intervalle.
Solution. Soit $I \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si
$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad [a;b] \subseteq I.$$

(b) Enoncer la proposition donnant l'inverse du produit.
Solution. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(c) Tracer le graphe complet de la fonction arccosinus.
Solution. Le graphe de la fonction arrcosinus :



2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ définie pour tout $(i,j) \in [\![1;4]\!]$, $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ OU } (i \geqslant 3 \text{ ET } j \geqslant 3) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On pose également $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. Ecrire A puis calculer BA.
Solution. On a
$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$
Et donc
$$\boxed{BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 7 \\ 5 & 6 & 15 & 15 \end{pmatrix}.}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation (I) : $\sqrt{2x^2+x+1} < 2x+1$.
Solution. Soit Δ le discriminant de $2x^2+x+1$, on a $\Delta = 1-8 = -7 < 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x^2+x+1 > 0$. De plus pour $x \in \mathbb{R}$, on a $2x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$. Fixons donc $x \geqslant -\frac{1}{2}$. On a alors,
$$\begin{aligned} (I) \quad &\Leftrightarrow \quad 2x^2+x+1 < (2x+1)^2 \qquad \text{car } 2x^2+x+1 \geqslant 0 \text{ et } 2x+1 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x^2+x+1 < 4x^2+4x+1 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < 2x^2+3x = 2x\left(x+\frac{3}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad x < -\frac{3}{2} \text{ OU } x > 0. \end{aligned}$$

Or $x \geqslant -\frac{1}{2}$. Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S} =]0;+\infty[\,.}$$

4. Soit $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 > x \geqslant -1 \right\}$. Déterminer sa borne inférieure, sa borne supérieure, son minimum et son maximum lorsqu'ils existent.
Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Premier cas, si $x < -1$ alors $x \notin A$.
Deuxième cas, si $-1 \leqslant x < 0$, alors $x^2 \geqslant 0 > x$ donc $x^2 > x \geqslant -1$ est vraie et $x \in A$.
Troisième cas, si $x = 0$ alors $x^2 = x$ donc $x \notin A$.
Quatrième cas, si $x > 0$, alors $x^2 > x \;\Leftrightarrow\; x > 1$. Ainsi,

$$A = [-1;0[\,\cup\,]1;+\infty[\,.$$

$\boxed{\text{La borne supérieure ni le maximum de } A \text{ n'existent}}$ car A n'est pas majorée et

$$\boxed{\inf(A) = \min(A) = -1.}$$

5. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation (E) : $xy''(x) - \left(12x^3+2\right)y'(x) + 45x^5y(x) = 0$. *Indication : poser* $t = x^3$.
Solution. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $z(t) = y(x) = y\left(t^{1/3}\right)$ i.e. $y(x) = z(t) = z\left(x^3\right)$. Puisque y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que la fonction $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ l'est aussi, la fonction z est bien définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions qui le sont. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} y'(x) &= 3x^2 z'\left(x^3\right) \\ y''(x) &= 6xz'\left(x^3\right) + 9x^4 z''\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
& y \text{ est solution de } (E) \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xy''(x) - \left(12x^3+2\right)y'(x) + 45x^5y(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x\left(6xz'\left(x^3\right) + 9x^4z''\left(x^3\right)\right) - \left(12x^3+2\right)\left(3x^2z'\left(x^3\right)\right) + 45x^5z\left(x^3\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 6x^2z'\left(x^3\right) + 9x^5z''\left(x^3\right) - \left(36x^5+6x^2\right)z'\left(x^3\right) + 45x^5z\left(x^3\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 9x^5z''\left(x^3\right) - 36x^5z'\left(x^3\right) + 45x^5z\left(x^3\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z''\left(x^3\right) - 4z'\left(x^3\right) + 5z\left(x^3\right) = 0 \qquad \text{car } x \neq 0.
\end{aligned}$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t = x^{1/3}$. Alors,

$$y \text{ est solution de } (E) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ z''(t) - 4z'(t) + 5z(t) = 0. \qquad (F)$$

L'équation caractéristique associée à (F) est $r^2 - 4r + 5 = 0$ dont le discriminant vaut $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$. Donc les racines sont complexes conjuguées : $r_1 = \frac{4+i\sqrt{4}}{2} = 2+i$ et $r_2 = 2-i$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (F) est

$$\mathscr{S}_F = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{2t}\left(A\cos(t) + B\sin(t)\right) \end{array} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E) \;&\Leftrightarrow\; \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ z(t) = \mathrm{e}^{2t}\left(A\cos(t) + B\sin(t)\right) \\
&\Leftrightarrow\; \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = z\left(x^{1/3}\right) = \mathrm{e}^{2x^{1/3}}\left(A\cos\left(x^{1/3}\right) + B\sin\left(x^{1/3}\right)\right).
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{2x^{1/3}}\left(A\cos\left(x^{1/3}\right) + B\sin\left(x^{1/3}\right)\right) \end{array} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$