Correction de l'interrogation 13
Matrices

1. (a) Enoncer la propriété donnant la transposée du produit.
   Solution. Soient $(n,r,p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $A \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{r,p}(\mathbb{K})$. Alors $(AB)^T = B^T A^T$.

   (b) Définir une matrice symétrique/antisymétrique.
   Solution. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   - La matrice M est symétrique $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $M^T = M$.
   - La matrice M est antisymétrique $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $M^T = -M$.

   (c) Enoncer la propriété donnant les racines n-ièmes d'un complexe non nul **quelconque**.
   Solution. Soit $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, on a

$$\omega^n = z \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad \omega = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}.$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = \left(a =_{i,j}= 2^{i+j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \left(b_{i,j} = \binom{n}{i}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$, le coefficient $c_{i,j}$ de la matrice $C = AB$.
   Solution. Soit $(i,j) \in [\![1; n]\!]$. Par définition du produit,

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} 2^{i+k}\binom{n}{k} = 2^i \sum_{k=1} \binom{n}{k} 2^k.$$

   On reconnait un binôme de Newton :

$$c_{i,j} = 2^i \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k - 1\right] = 2^i \left[(2+1)^n - 1\right] = 2^i \left(3^n - 1\right).$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2, \qquad c_{i,j} = 2^i \left(3^n - 1\right).}$$

3. Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer pour tout $p \in \mathbb{N}$, B^p. En déduire pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p.
   Solution. On calcule :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = O_2.$$

   Par suite, pour tout $p \geqslant 2$, $B^p = O_2$. D'où,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad B^p = \begin{cases} I_2 & \text{si } p = 0 \\ B & \text{si } p = 1 \\ O_2 & \text{si } p \geqslant 2. \end{cases}}$$

   Or on observe que $A = 3I_2 + B$ et $3I_2$ et B commutent. Donc par la formule du binôme de Newton, on a les égalités matricielles suivantes, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$A^p = (3I_2 + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k \left(3I_2\right)^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 3^{p-k} B^k.$$

   Si $p \geqslant 1$,

$$A^p = \binom{p}{0} 3^p I_2 + \binom{p}{1} 3^{p-1} B + O_2 = 3^p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + p3^{p-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^p + p3^{p-1} & p3^{p-1} \\ -p3^{p-1} & 3^p - p3^{p-1} \end{pmatrix}.$$

   On note que la formule reste vraie si $p = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = 3^{p-1} \begin{pmatrix} p+3 & p \\ -p & -(p-3) \end{pmatrix}.}$$

   Vérification, si $p = 1$, $3^{p-1} \begin{pmatrix} p+3 & p \\ -p & -(p-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A$ *OK !*

4. Déterminer si $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible ou non et si P est inversible, calculer son inverse.

Solution. En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, on a les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{array}{lcr}
P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} & & I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & L_3 \leftrightarrow L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{array}{lcr}
P \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} & I_3 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

Puisque $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, on en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$. De plus,

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.}$$

On pense à vérifier son résultat que $P^{-1}P = I_3$!

5. Déterminer en justifiant un équivalent quand $n \to +\infty$ de $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Solution. On a pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n^3}\right) = \ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n^3}\right) = -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$. Posons $u = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} 0$. Dès lors,

$$-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}.$$

D'autre part, $\operatorname{sh}(v) \underset{v\to 0}{\sim} v$. Posons $v = \frac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc on a aussi,

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}.$$

PAS DE SOMME D'EQUIVALENTS !!!

Or $\frac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\ll} -\frac{1}{n}$. Donc $\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\ll} -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Ainsi,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}.}$$