# Correction de l'interrogation 14
# Analyse asymptotique

1. (a) Enoncer le théorème d'encadrement des équivalents.
*Solution.* Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $I$ un voisinage de $a$ et $(f,g,h) \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})^3$ tels que
$$\forall x \in I, \qquad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x).$$
Alors, par le théorème d'encadrement des équivalents,
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x).$$

(b) Enoncer la propriété permettant de primitiver un développement limité.
*Solution.* Soient $I$ un voisinage de 0 et $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{K})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en 0 donné par
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right), \qquad (a_k)_{k\in[\![0\,;\,n]\!]} \in \mathbb{K}^{n+1}.$$
Soit $F$ une primitive de $f$ sur $I$ alors $F$ admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 donné par
$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

(c) Enoncer la croissance de l'intégrale.
*Solution.* Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $a < b$, et $(f,g) \in \mathscr{C}([a;b],\mathbb{R})^2$ telles que
$$\forall t \in [a;b], \qquad f(t) \leqslant g(t).$$
Alors,
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Calculer un développement à l'ordre 2 en 0 de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{3+x}}$.
**Solution.** On a
$$\frac{1}{3+x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{3}} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3} - \frac{x}{9} + \frac{x^2}{27} + o\left(x^2\right).$$
Donc
$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{3+x}} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{9}+\frac{x^2}{27}+o\left(x^2\right)}.$$
Or $\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{9} + \frac{x^2}{27} + o\left(x^2\right)$. Alors
- $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$
- $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x}{9}$, donc $u^2(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{81}$ i.e. $u^2(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{81} + o\left(x^2\right)$. D'où,
$$\frac{u^2(x)}{2} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{162} + o\left(x^2\right).$$
- Enfin, $o\left(u(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$.

Par conséquent,
$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{u(x)} &\underset{x\to 0}{=} 1 - \tfrac{x}{9} + \tfrac{x^2}{27} + o\left(x^2\right) \\
&\qquad\qquad + \tfrac{x^2}{162} + o\left(x^2\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + o\left(x^2\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \tfrac{x}{9} + \tfrac{7x^2}{162} + o\left(x^2\right).
\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{\frac{1}{3}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}\,\frac{x}{9} + \frac{7\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}\,x^2}{162} + o\left(x^2\right).}$$

3. Calculer le développement limité à l'ordre 5 en $\frac{\pi}{6}$ (!) de cos.
*Solution.* Posons $x = \frac{\pi}{6} + h$ i.e. $h = x - \frac{\pi}{6}$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + h\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(h) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(h) \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} + o\left(h^5\right)\right) - \frac{1}{2}\left(h - \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120} + o\left(h^5\right)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{h}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}h^2 + \frac{h^3}{12} + \frac{\sqrt{3}}{48}h^4 - \frac{h^5}{240} + o\left(h^5\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{\sqrt{3}}{48}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4 - \frac{1}{240}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^5 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^5\right).}$$

4. Déterminer un développement à l'ordre 5 en 0 de $f : x \mapsto \frac{\arctan(x)}{1+x^2}$ et **en déduire** celui de $F : x \mapsto \frac{\arctan^2(x)}{2}$ à l'ordre 6 en 0.
*Solution.* Au voisinage de 0, on a

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right).$$

De plus,

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o\left(x^4\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\arctan(x)}{1+x^2} \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)\left(1 - x^2 + x^4 + o\left(x^4\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{llll}
x & -x^3 & +x^5 & +o\left(x^5\right) \\
 & -\frac{x^3}{3} & +\frac{x^5}{3} & +o\left(x^5\right) \\
 & & +\frac{x^5}{5} & +o\left(x^5\right) \\
 & & & +o\left(x^5\right)
\end{array} \\
&\underset{x\to 0}{=} x - \tfrac{4x^3}{3} + \tfrac{23x^5}{15} + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

De plus,
- La fonction $f$ admet donc un développement limité à l'ordre 5.
- La fonction $F$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, la fonction $F$ admet un développement limité à l'ordre 6 et celui-ci est donné par

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{23x^6}{90} + o\left(x^6\right).$$

Comme $F(0) = \arctan(0)/2 = 0$, on conclut que

$$\boxed{F(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{23x^6}{90} + o\left(x^6\right).}$$

5. Montrer que la courbe de $f : x \mapsto \sqrt{4x^2 + 3x + 6} + \ln(1+x) - \ln(x)$ admet une asymptote en $+\infty$, déterminer son équation et préciser la position de la courbe de $f$ par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.
*Solution.* Posons pour tout $x > 0$, $h = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{\frac{4}{h^2} + \frac{3}{h} + 6} + \ln\left(1 + \frac{1}{h}\right) - \ln\left(\frac{1}{h}\right) \\
&= \frac{2}{h}\sqrt{1 + \frac{3h}{4} + \frac{3h^2}{2}} + \ln\left(\frac{h+1}{h}\right) + \ln(h) \qquad \text{car } h > 0 \\
&= \frac{2}{h}\sqrt{1 + \frac{3h}{4} + \frac{3h^2}{2}} + \ln(1+h).
\end{aligned}$$

Posons $u(h) \underset{h\to 0}{=} \frac{3h}{4} + \frac{3h^2}{2}$. Alors,

- $u(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- Puis, $u(h) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{3h}{4}$ donc $u(h)^2 \underset{h\to 0}{\sim} \frac{9h^2}{16}$ i.e. $u(h)^2 \underset{h\to 0}{=} \frac{9h^2}{16} + o\left(h^2\right)$.
- Enfin, $o\left(u(h)\right) \underset{h\to 0}{=} o\left(\frac{9h^2}{16} + o\left(h^2\right)\right) \underset{h\to 0}{=} o\left(h^2\right)$.

Or

$$\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}u^2 + o\left(u^2\right) \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o\left(u^2\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + \frac{3h}{4} + \frac{3h^2}{2}} = \sqrt{1+u(h)} & \\
\underset{h\to 0}{=} 1 + \tfrac{3h}{8} & + \tfrac{3h^2}{4} \\
& - \tfrac{1}{8}\tfrac{9h^2}{16} \qquad + o\left(h^2\right) \\
& \qquad\qquad\qquad\quad + o\left(h^2\right) \\
\underset{h\to 0}{=} 1 + \tfrac{3h}{8} & + \tfrac{32\times 3 - 9}{128}h^2 \quad + o\left(h^2\right) \\
\underset{h\to 0}{=} 1 + \tfrac{3h}{8} & + \tfrac{87}{128}h^2 \qquad\quad + o\left(h^2\right)
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{h\to 0}{=} \frac{2}{h}\left(1 + \frac{3h}{8} + \frac{87}{128}h^2 + o\left(h^2\right)\right) + h + o\left(h\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{2}{h} + \frac{3}{4} + \frac{87}{64}h + o\left(h\right) + h + o\left(h\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{2}{h} + \frac{3}{4} + \frac{151}{64}h + o\left(h\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 2x + \frac{3}{4} + \frac{151}{64x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Conclusion, la courbe de $f$ admet une asymptote en $+\infty$ d'équation

$$\boxed{y = 2x + \frac{3}{4}.}$$

De plus,

$$f(x) - \left(2x + \frac{3}{4}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{151}{64x},$$

et $\forall x > 0$, $\frac{151}{64x} > 0$. Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré. Conclusion, le graphe de $f$ est

$$\boxed{\text{au dessus de son asymptote au voisinage de } +\infty.}$$